

Aufgaben zum Thema **Decodieren von BCH-Codes**

Aufgabe 5.1 Beweisen Sie die Existenz eines binären zyklischen $[31, 6]$ -Codes mit Minimaldistanz ≥ 15 . (*Hinweis:* $\frac{x^{31}+1}{x+1}$ ist ein Produkt von irreduziblen Polynomen von Grad 5 über \mathbb{F}_2 . Benutzen Sie die BCH-Schranke.)

Aufgabe 5.2 Es sei $K = \mathbb{F}_7 = \{0, 1, \dots, 6\}$ und $(a_1, a_2, \dots, a_6) = (1, 2, \dots, 6)$.

a) Berechnen Sie

$$H = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & \cdots & a_6 \\ a_1^2 & \cdots & a_6^2 \\ a_1^3 & \cdots & a_6^3 \end{pmatrix}.$$

b) Bestimmen Sie die Parameter des Codes $C = \{c \in K^6 \mid Hc^T = 0\}$.

c) Decodieren Sie das Wort $(5, 2, 5, 0, 1, 0)$.

d) Realisieren Sie den Decodieralgorithmus mit dem Rechner.

Aufgabe 5.3 Wir betrachten den $[7, 4, 3]_2$ -Hamming-Code C als BCH-Code mit geplanter Minimaldistanz $\delta = 3$. Dann ist die Kontrollmatrix H gegeben durch

$$H = (1 \quad \alpha \quad \alpha^2 \quad \alpha^3 \quad \alpha^4 \quad \alpha^5 \quad \alpha^6) \text{ über } \mathbb{F}_8,$$

wobei α die primitive 7-te Einheitswurzel mit $\alpha^3 + \alpha + 1$ ist.

a) Benutzen Sie den BCH-Decodierer um die Wörter (0101010) und (1010111) zu decodieren.

b) Realisieren Sie den Decodieralgorithmus mit dem Rechner.

Aufgabe 5.4 Wir betrachten den binären BCH-Code C mit Länge $n = 15$ und geplanter Minimaldistanz $\delta = 5$. Bestimmen Sie das Erzeugerpolynom und Dimension des Codes. Die Kontrollmatrix H ist gegeben durch

$$H = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 & \alpha^3 & \alpha^4 & \alpha^5 & \dots & \alpha^{13} & \alpha^{14} \\ 1 & \alpha^3 & \alpha^6 & \alpha^9 & \alpha^{12} & 1 & \dots & \alpha^9 & \alpha^{12} \end{pmatrix} \text{ über } \mathbb{F}_{16},$$

wobei α die primitive 15-te Einheitswurzel mit $\alpha^4 + \alpha + 1$ ist.

a) Zeigen Sie, wie der BCH-Decodierer den 1-Bit-Fehler mit Fehlerposition 6 sowie den 2-Bit-Fehler mit Fehlerpositionen 4 und 14 decodiert.

b) Realisieren Sie den Decodieralgorithmus mit dem Rechner.

Aufgabe 5.5 (Diese Aufgabe ist nur mit dem Rechner zu Lösen.) Konstruieren Sie den binären BCH-Code C mit Länge $n = 31$ und geplanter Minimaldistanz $\delta = 5$, dabei soll die Kontrollmatrix H über $\mathbb{F}_{32} = \mathbb{F}_2[x]/\langle x^5+x^2+1 \rangle$ gegeben sein.

Was ist das Erzeugerpolynom und die Dimension des Codes?

Realisieren Sie den Decodieralgorithmus mit dem Rechner.

Aufgabe 4.1c) Es sei C der quaternäre Code mit Erzeugermatrix

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & x+1 & 0 & x \\ 0 & 0 & x & x+1 & x+1 & x \\ 0 & x & 0 & x & x+1 & x+1 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass C zyklisch ist. Finden Sie das Erzeuger- und das Kontrollpolynom sowie die Parameter von C .