Hinweise zu den Beispielaufgaben zum Thema **Vektoren**

Aufgabe 1.1 Es sei ein Dreieck Δ mit Ecken $(0,0)$, $(2,2)$ und $(3,0)$ gegeben.

a) Berechnen Sie die Seitenlängen und Cosinus der drei Winkel.

b) Geben Sie die Koordinaten der Seitenmitten an.

c) Bestimmen Sie eine Parameterdarstellung und eine Geradengleichung für jede der drei *Seitenhalbierenden* (Gerade durch eine Ecke und die Mitte der gegenüberliegenden Seite).

d) Bestimmen Sie eine Parameterdarstellung und eine Geradengleichung für jede der drei *Höhengeraden*. (Unter Höhengerade ist die Gerade durch eine Ecke gemeint, die orthogonal zu der gegenüberliegenden Seite ist.)

Hinweise.

a) Die Sietenlängen sind $2\sqrt{2}$, 3, $\sqrt{5}$.
Die Winkel: $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\alpha = \frac{\pi}{4}$, $\cos\beta = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{10}}$.

b) Seitenmitten: $(1,1)$, $(\frac{3}{2},0)$, $(\frac{5}{2},1)$.

c) Durch $(0,0)$ und $(\frac{5}{2},1)$: $\lambda(\frac{5}{2},1)$ bzw. $-x+\frac{5}{2}y=0$.
Durch $(2,2)$ und $(\frac{3}{2},0)$: $(2,2)+\lambda(\frac{1}{2},2)$ bzw. $-2x+\frac{1}{2}y=5$.
Durch $(3,0)$ und $(1,1)$: $(3,0)+\lambda(2,-1)$ bzw. $x+2y=6$.

d) Durch $(0,0)$: $-x+2y=0$ bzw. $\lambda(2,1)$.
Durch $(2,2)$: $x=2$ bzw. $(2,2)+\lambda(0,1)$.
Durch $(3,0)$: $x+y=3$ bzw. $(3,0)+\lambda(1,-1)$.

□

Aufgabe 1.2 Es seien die folgenden Geraden durch Geradengleichungen gegeben. Geben Sie für jede dieser Geraden eine Parameterdarstellung an.
(*Hinweis:* Finden Sie jeweils zuerst zwei Punkte auf der Geraden!)

a) $y=x$,

b) $y=x+1$,

c) $y=2x-2$,

d) $x=1$,

e) $y=0$,

f) $3x-2y=1$,

Hinweise. a) $\lambda(1,1)$, b) $(0,1)+\lambda(1,1)$, c) $(0,-2)+\lambda(1,2)$, d) $(1,0)+\lambda(0,1)$, e) $\lambda(1,0)$, f) $(0,-\frac{1}{2})+\lambda(1,\frac{3}{2})$. □

Aufgabe 1.3 Es sei jeweils ein Paar der Geraden gegeben. Testen Sie, ob die Geraden parallel sind. Falls nein, können Sie den Schnittpunkt der Geraden bestimmen?

a) $(1,0)+\lambda(0,1)$ und $(1,1)+\mu(0,-1)$,

b) $(2,1)+\lambda(0,1)$ und $(1,2)+\mu(1,-1)$,

c) $(2,-2)+\lambda(1,1)$ und $x=0$,

d) $(1,1)+\lambda(1,2)$ und $x-2y=1$,

e) $x+y=1$ und $2x-y=2$.

Hinweise. a) ja, b) nein, $(2,1)$, c) nein, $(0,4)$, d) nein, $(\frac{1}{3},-\frac{1}{3})$, e) nein, $(1,0)$. □

Aufgabe 1.4 Flugzeug Alpha fliegt gradlinig durch die beiden Punkte $A=(-8,3,2)$ und $B=(-4,-1,4)$. Eine Einheit im Koordinatensystem entspricht 1 km. Der Flughafen F befindet sich in der x-y-Ebene.

a) In welchem Punkt F ist das Flugzeug gestartet? In welchem Punkt T erreicht es seine Reiseflughöhe von 10.000m?

b) Flugzeug Beta steuert vom Punkt $C=(10,-10,5)$ in Richtung $v=(-2,2,-1)$ an. Zeigen Sie, dass die beiden Flugzeuge keinesfalls kollidieren können.

c) In dem Moment, an dem Flugzeug Alpha den Punkt B passiert, erreicht Flugzeug Beta den Punkt C. Wie groß ist die Entfernung der Flugzeuge zu diesem Zeitpunkt?

Hinweise. a) $(-12,7,0)$, $(8,-13,10)$, b) die Flugbahnen sind parallel, c) $\sqrt{278}$. □

Aufgabe 1.5 Es sei ein Dreieck $\Delta\subset\mathbb{R}^3$ mit Ecken

$$(0,0,0),\quad \tfrac{1+\sqrt{3}}{3}\,(1,2,2)\ \text{ und }\ \left(\tfrac{1}{3},\tfrac{2}{3}+\tfrac{\sqrt{2}}{2},\tfrac{2}{3}-\tfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

gegeben.

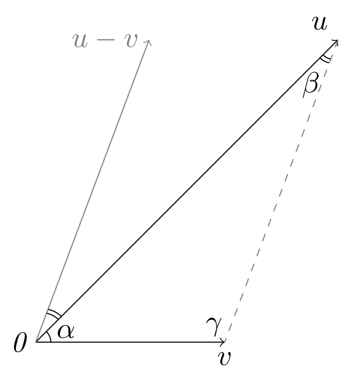
a) Bestimmen Sie die Seitenlängen des Dreiecks Δ.

b) Berechnen Sie die (Cosinus der) Eckwinkel von Δ. Ist Δ rechtwinklig?

Wie kann man ohne Berechnung der Eckwinkel entscheiden, ob das Dreieck rechtwinklig ist?

Hinweise. Wir setzten zunächst:

$$\mathit{0}=(0,0,0),\quad u=\tfrac{1+\sqrt{3}}{3}\,(1,2,2)\ \text{ und }\ v=\left(\tfrac{1}{3},\tfrac{2}{3}+\tfrac{\sqrt{2}}{2},\tfrac{2}{3}-\tfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$$



a) Die Längen der Seiten entsprechen den Längen der Vektoren u, v und $u-v$:

$$\|u\| = \sqrt{u \cdot u} = \tfrac{1+\sqrt{3}}{3}\sqrt{1^2+2^2+2^2} = 1+\sqrt{3},$$

$$\begin{aligned}\|v\| &= \sqrt{\left(\tfrac{1}{3}\right)^2 + \left(\tfrac{2}{3}+\tfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\tfrac{2}{3}-\tfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} \\ &= \sqrt{\tfrac{1}{9}+\tfrac{4}{9}+\tfrac{1}{2}+\tfrac{2\sqrt{2}}{3}+\tfrac{4}{9}+\tfrac{1}{2}-\tfrac{2\sqrt{2}}{3}} = \sqrt{2}, \\ \|u-v\| &= \left\|\left(\tfrac{\sqrt{3}}{3}, \tfrac{2\sqrt{3}}{3}-\tfrac{\sqrt{2}}{2}, \tfrac{2\sqrt{3}}{3}+\tfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\right\| \\ &= \sqrt{\tfrac{1}{3}+\tfrac{4}{3}+\tfrac{1}{2}-2\tfrac{\sqrt{6}}{3}+\tfrac{4}{3}+\tfrac{1}{2}+2\tfrac{\sqrt{6}}{3}} = \sqrt{4} = 2\end{aligned}$$

b) Der Eckwinkel α in *0* ist zwischen u und v; der Eckwinkel β in $\frac{1+\sqrt{3}}{3}(1,2,2)$ ist zwischen u und $u-v$. Wir berechnen zuerst die Skalarprodukte

$$\begin{aligned}u\cdot v &= \tfrac{1+\sqrt{3}}{3}(1,2,2)\cdot\left(\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}+\tfrac{\sqrt{2}}{2}, \tfrac{2}{3}-\tfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \tfrac{1+\sqrt{3}}{3}\left(\tfrac{1}{3}+\tfrac{4}{3}+\sqrt{2}+\tfrac{4}{3}-\sqrt{2}\right) = 1+\sqrt{3}, \\ u\cdot(u-v) &= u\cdot u - u\cdot v = \|u\|^2 - u\cdot v = (1+\sqrt{3})^2-(1+\sqrt{3}) = 3+\sqrt{3}.\end{aligned}$$

Daher haben wir

$$\begin{aligned}\cos\alpha &= \frac{u\cdot v}{\|u\|\cdot\|v\|} = \frac{1+\sqrt{3}}{(1+\sqrt{3})\cdot\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \;\Rightarrow\; \alpha = \frac{\pi}{4}, \\ \cos\beta &= \frac{u\cdot(u-v)}{\|u\|\cdot\|u-v\|} = \frac{3+\sqrt{3}}{(1+\sqrt{3})\cdot 2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \;\Rightarrow\; \beta = \frac{\pi}{6},\end{aligned}$$

Da die Summe aller Eckwinkel eines Dreieck stets π ergibt, gilt

$$\gamma = \pi-\alpha-\beta = \pi-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{12}.$$

Da keiner der drei Winkel gleich $\frac{\pi}{2}$ ist, ist das Dreieck nicht rechtwinklig.

Alternativ könnte man nach dem Satz von Pythagoras überprüfen:
Gilt $a^2+b^2=c^2$ für die Seitenlängen a,b,c, wobei c die längste Seite ist, so ist das Dreieck rechtwinklig!

Die dritte Möglichkeit wäre Skalarprodukte zwischen Paaren von "Seitenvektoren" zu berechnen: Ist kein der Skalarprodunkte $u\cdot v$, $u\cdot(u-v)$, $v\cdot(u-v)$ gleich 0, so ist das Dreieck nicht rechtwinklig!

□

Aufgabe 1.6 Geraden im Raum.

a) Es seien in $\mathbb{R}^3$ drei Punkte gegeben: $A=(1,-2,1)$, $B=(2,-1,2)$ und $C=(-1,-4,-1)$. Zeigen Sie, dass die Punkte A,B,C kollinear sind, d.h. dass alle drei auf einer Geraden liegen.

b) Es sei G_1 die Gerade aus Teil a) und G_2 die Gerade mit Parameterdarstellung $(3,0,-3)+\mu(0,0,1)$. Sind G_1 und G_2 parallel? Falls nein, können Sie auch entscheiden, ob sie windschief sind oder sich schneiden?

Hinweise. Die Gerade durch A und B hat die Parameterdarstellung: $(1,-2,1)+\lambda(1,1,1)$. C liegt auf deiser Geraden ($\lambda=-2$). G_1 und G_2 schneiden sich im Punkt $(3,0,3)$. □

Aufgabe 1.7 Es seien vier Punkte in $\mathbb{R}^3$ gegeben:

$$A = (3, 1, 2), \quad B = (6, 2, 2) \quad C = (5, 9, 4) \text{ und } D = (1, 4, 3).$$

a) Was ist die längste Seite des Vierecks $ABCD$?

b) Hat das Viereck $ABCD$ einen rechten Winkel?

c*) Ist das Viereck $ABCD$ eben (flach)?
(*Hinweis:* In einem ebenen Viereck schneiden sich die Diagonalen.)

Hinweise.

a) Die längste Seite ist BC mit $\sqrt{54}$.

b) Nein.

c) Ja: die Diagonalen schneiden sich im Punkt $(\frac{7}{2}, 3, \frac{3}{2})$.

□