

Beispielaufgaben zum Thema **Vektoren**

Aufgabe 1.1 Es sei ein Dreieck Δ mit Ecken $(0, 0)$, $(2, 2)$ und $(3, 0)$ gegeben.

- Berechnen Sie die Seitenlängen und Cosinus der drei Winkel.
- Geben Sie die Koordinaten der Seitenmitten an.
- Bestimmen Sie eine Parameterdarstellung und eine Geradengleichung für jede der drei *Seitenhalbierenden* (Gerade durch eine Ecke und die Mitte der gegenüberliegenden Seite).
- Bestimmen Sie eine Parameterdarstellung und eine Geradengleichung für jede der drei *Höhengeraden*. (Unter Höhengerade ist die Gerade durch eine Ecke gemeint, die orthogonal zu der gegenüberliegenden Seite ist.)

Aufgabe 1.2 Es seien die folgenden Geraden durch Geradengleichungen gegeben. Geben Sie für jede dieser Geraden eine Parameterdarstellung an.

(*Hinweis:* Finden Sie jeweils zuerst zwei Punkte auf der Geraden!)

- $y = x$,
- $y = x + 1$,
- $y = 2x - 2$,
- $x = 1$,
- $y = 0$,
- $3x - 2y = 1$,

Aufgabe 1.3 Es sei jeweils ein Paar der Geraden gegeben. Testen Sie, ob die Geraden parallel sind. Falls nein, können Sie den Schnittpunkt der Geraden bestimmen?

- $(1, 0) + \lambda(0, 1)$ und $(1, 1) + \mu(0, -1)$,
- $(2, 1) + \lambda(0, 1)$ und $(1, 2) + \mu(1, -1)$,
- $(2, -2) + \lambda(1, 1)$ und $x = 0$,
- $(1, 1) + \lambda(1, 2)$ und $x - 2y = 1$,
- $x + y = 1$ und $2x - y = 2$.

Aufgabe 1.4 Flugzeug Alpha fliegt gradlinig durch die beiden Punkte $A = (-8, 3, 2)$ und $B = (-4, -1, 4)$. Eine Einheit im Koordinatensystem entspricht 1 km. Der Flughafen F befindet sich in der x - y -Ebene.

- In welchem Punkt F ist das Flugzeug gestartet? In welchem Punkt T erreicht es seine Reiseflughöhe von 10.000m?
- Flugzeug Beta steuert vom Punkt $C = (10, -10, 5)$ in Richtung $v = (-2, 2, -1)$ an. Zeigen Sie, dass die beiden Flugzeuge keinesfalls kollidieren können.
- In dem Moment, an dem Flugzeug Alpha den Punkt B passiert, erreicht Flugzeug Beta den Punkt C . Wie groß ist die Entfernung der Flugzeuge zu diesem Zeitpunkt?

Aufgabe 1.5 Es sei ein Dreieck $\Delta \subset \mathbb{R}^3$ mit Ecken

$$(0, 0, 0), \quad \frac{1+\sqrt{3}}{3}(1, 2, 2) \quad \text{und} \quad \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3} + \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{2}{3} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

gegeben.

- a) Bestimmen Sie die Seitenlängen des Dreiecks Δ .
- b) Berechnen Sie die (Cosinus der) Eckwinkel von Δ . Ist Δ rechtwinklig?
Wie kann man ohne Berechnung der Eckwinkel entscheiden, ob das Dreieck rechtwinklig ist?

Aufgabe 1.6 Geraden im Raum.

- a) Es seien in \mathbb{R}^3 drei Punkte gegeben: $A = (1, -2, 1)$, $B = (2, -1, 2)$ und $C = (-1, -4, -1)$. Zeigen Sie, dass die Punkte A, B, C kollinear sind, d.h. dass alle drei auf einer Geraden liegen.
- b) Es sei G_1 die Gerade aus Teil a) und G_2 die Gerade mit Parameterdarstellung $(3, 0, -3) + \mu(0, 0, 1)$. Sind G_1 und G_2 parallel? Falls nein, können Sie auch entscheiden, ob sie windschief sind oder sich schneiden?

Aufgabe 1.7 Es seien vier Punkte in \mathbb{R}^3 gegeben:

$$A = (3, 1, 2), \quad B = (6, 2, 2) \quad C = (5, 9, 4) \quad \text{und} \quad D = (1, 4, 3).$$

- a) Was ist die längste Seite des Vierecks $ABCD$?
- b) Hat das Viereck $ABCD$ einen rechten Winkel?
- c*) Ist das Viereck $ABCD$ eben (flach)?
(Hinweis: In einem ebenen Viereck schneiden sich die Diagonalen.)