Hinweise zu den Beispielaufgaben zum Thema **Wurzel aus einer Matrix. Positive Definitheit**

Aufgabe 10.1 Es sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Beweisen Sie:

a) $\langle Ax, y\rangle = \langle x, A^T y\rangle$, vobei $\langle v, w\rangle$ das Skalarprodukt von v und w bezeichnet.

b) Ist v ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ, so ist v ein Eigenvektor von A^T zum Eigenwert λ. Insbesondere, $\sigma(A) = \sigma(A^T)$.

c) Ist A symmetrisch (d.h. $A = A^T$) und $\lambda_1 \neq \lambda_2 \in \sigma(A)$ mit Eigenvektoren v_1 und v_2, so gilt $v_1 \perp v_2$.

Hinweise. a) Es sei $A = (a_{ij})$, $A^T = (a'_{ji}) = (a_{ji})$.

$$\langle Ax, y\rangle = \left\langle \sum_{i=0}^{n} a_{ij}x_j, y \right\rangle = \sum_{i=0}^{n} a_{ij}x_jy_i$$
$$\langle x, A^T y\rangle = \left\langle x, \sum_{i=0}^{n} a'_{ij}y_j \right\rangle = \sum_{i=0}^{n} a'_{ji}y_jx_i = \sum_{i=0}^{n} a_{ji}y_jx_i$$

Nach vertauschen von i und j sehen wir, dass die beiden Ausdrücke gleich sind.

b) Es sei v ein EV von A zum EW λ. Dann gilt für alle $y \in V$:

$$\langle y, A^T v\rangle = \langle Av, y\rangle = \langle \lambda v, y\rangle = \langle y, \lambda v\rangle,$$

also muss gelten $A^T v = \lambda v$.

c) Wir berechnen

$$\langle Av_1, v_2\rangle = \langle \lambda_1 v_1, v_2\rangle = \lambda_1 \langle v_1, v_2\rangle,$$
$$\langle Av_1, v_2\rangle = \langle v_1, A^T v_2\rangle = \langle v_1, \lambda_2 v_2\rangle = \lambda_2 \langle v_1, v_2\rangle,$$

also gilt

$$(\lambda_1 - \lambda_2)\langle v_1, v_2\rangle = 0 \Rightarrow \langle v_1, v_2\rangle = 0.$$

□

Aufgabe 10.2

a) Es sei $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$.
Beweisen Sie, dass es eine Wurzel aus A existiert. Finden Sie die Wurzel W aus A.

b) Es sei $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$.
Zeigen Sie, dass A positiv definit ist. Finden Sie die Wurzel W aus A.

Hinweise. a) Siehe Vorlesung.

b) Die Hauptminoren sind: $m_1 = 5$, $m_2 = \det A = 9$, also ist A positiv definit.
Wir erhalten $\sigma(A) = \{1, 9\}$ und $\mathrm{Eig}(A, 1) = \langle \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right) \rangle$, $\mathrm{Eig}(A, 9) = \langle \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \rangle$. Somit gilt $A = BDB^{-1}$ mit $D = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 9 \end{smallmatrix}\right)$ und $B = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ und $W = B\sqrt{D}B^{-1} = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix}\right)$.

□

Aufgabe 10.3 Es seien die folgenden Matrizen gegeben:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 4 & -4 \\ 2 & -4 & 4 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 10 & -4 \\ 2 & -4 & 4 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

a) Welche dieser Matrizen sind positiv (semi)definit.

b) Finden Sie die Wurzel aus A_i, $i \in \{1,2,3,4\}$, falls solche existiert.

Hinweise.

A_1) Die Hauptminoren sind: $m_1 = 1$, $m_2 = 1$, $m_3 = \det A = 0$. Es gilt $\sigma(A) = \{0,1,3\}$, also positiv semidefinit.

Wir erhalten $\mathrm{Eig}(A,3) = \left\langle \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{smallmatrix} \right) \right\rangle$, $\mathrm{Eig}(A,1) = \left\langle \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix} \right) \right\rangle$, $\mathrm{Eig}(A,0) = \left\langle \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{smallmatrix} \right) \right\rangle$. Somit gilt $A = BDB^{-1}$ mit $D = \left(\begin{smallmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix} \right)$ und $B = \left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{smallmatrix} \right)$ und

$$W = B\sqrt{D}B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{2\sqrt{3}} - \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{2\sqrt{3}} - \frac{1}{2} & \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$$

A_2) Die Hauptminoren sind: $m_1 = 1$, $m_2 = 0$, $m_3 = 0$. Es gilt $\sigma(A) = \{0,9\}$, also positiv semidefinit.

Wir erhalten $\mathrm{Eig}(A,3) = \left\langle \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{smallmatrix} \right) \right\rangle$, $\mathrm{Eig}(A,0) = \left\langle \left(\begin{smallmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix} \right), \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix} \right) \right\rangle$ und

$$W = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 4 & -4 \\ 2 & -4 & 4 \end{pmatrix}.$$

A_3) Die Hauptminoren sind: $m_1 = 2$, $m_2 = 19$, $m_3 = -12$, also weder positiv definit noch positiv semidefinit.

A_4) Die Hauptminoren sind: $m_1 = 3$, $m_2 = 8$, also positiv definit.

Wir erhalten $\sigma(A) = \{4,2\}$ und $\mathrm{Eig}(A,4) = \langle \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix} \right) \rangle$, $\mathrm{Eig}(A,2) = \left\langle \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 1 \end{smallmatrix} \right) \right\rangle$ und

$$W = \begin{pmatrix} 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} & 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} & 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

$\square$

Aufgabe 10.4

Es sei $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$.

a) Beweisen Sie, dass A diagonalisierbar ist, und finden Sie die Diagonalmatrix D, sowie eine Matrix B, sodass $D = B^{-1}AB$ gilt.

b) Berechnen Sie A^2 sowie A^n für alle $n \in \mathbb{N}$. Unterscheiden Sie dabei, ob n gerade oder ungerade ist.

Hinweise.

a) Wir finden: $\sigma(A) = \{0, 1, -1\}$, $\mathrm{Eig}(A, 0) = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$, $\mathrm{Eig}(A, 1) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$, $\mathrm{Eig}(A, -1) = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$. Somit gilt $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

b) Wegen $A = BDB^{-1}$ berechnen wir am schnellsten: $A^n = BD^nB^{-1}$.

Für n ungerade gilt $D^n = D$, also ist $A^n = A$.

Für n gerade gilt $D^n = D^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, also ist

$$A^n = A^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

□