Beispielaufgaben zum Thema **Wurzel aus einer Matrix. Positive Definitheit**

Aufgabe 10.1 Es sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Beweisen Sie:

a) $\langle Ax, y\rangle = \langle x, A^T y\rangle$, vobei $\langle v, w\rangle$ das Skalarprodukt von v und w bezeichnet.

b) Ist v ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ, so ist v ein Eigenvektor von A^T zum Eigenwert λ. Insbesondere, $\sigma(A) = \sigma(A^T)$.

c) Ist A symmetrisch (d.h. $A = A^T$) und $\lambda_1 \neq \lambda_2 \in \sigma(A)$ mit Eigenvektoren v_1 und v_2, so gilt $v_1 \perp v_2$.

Aufgabe 10.2

a) Es sei $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$.
Beweisen Sie, dass es eine Wurzel aus A existiert. Finden Sie die Wurzel W aus A.

b) Es sei $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$.
Zeigen Sie, dass A positiv definit ist. Finden Sie die Wurzel W aus A.

Aufgabe 10.3 Es seien die folgenden Matrizen gegeben:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 4 & -4 \\ 2 & -4 & 4 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 10 & -4 \\ 2 & -4 & 4 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

a) Welche dieser Matrizen sind positiv (semi)definit.

b) Finden Sie die Wurzel aus A_i, $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, falls solche existiert.

Aufgabe 10.4

Es sei $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$.

a) Beweisen Sie, dass A diagonalisierbar ist, und finden Sie die Diagonalmatrix D, sowie eine Matrix B, sodass $D = B^{-1}AB$ gilt.

b) Berechnen Sie A^2 sowie A^n für alle $n \in \mathbb{N}$. Unterscheiden Sie dabei, ob n gerade oder ungerade ist.