Beispielaufgaben zum Thema **Hilberträume**

Aufgabe 11.1 Zeigen Sie, dass die gegebene Abbildung $\langle \cdot\,, \cdot \rangle : V \times V \to K$ in der Tat ein Skalarprodukt auf dem K-Vektorraum V ist.

a) $V = \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine symmetrische positiv definite Matrix, $\langle x, y\rangle = x^T A\, y$.

b) $V = \mathbb{C}^n$, $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ eine hermitesche ($A = \overline{A}^T$) positiv definite Matrix, $\langle x, y\rangle = x^T A\, \overline{y}$.

c) $V = \mathbb{R}[0, 1]$ der Raum auf $[0, 1]$ stetigen Funktionen, $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt$.

d) $V = \ell^2 = \left\{ (a_0, a_1, \dots) \,|\, a_j \in \mathbb{R}, \sum\limits_{j=0}^{\infty} a_j < \infty \right\}$, $\langle (a_j), (b_j)\rangle = \sum\limits_{j=0}^{\infty} a_j b_j$.

Aufgabe 11.2 Benutzen Sie das Orthogonalisierungsverfahren um Orthonormalbasen (bezüglich des jeweiligen Standardskalarproduktes) der folgenden Unterräume zu konstruieren:

a) $U = \langle v_1, v_2\rangle \le \mathbb{R}^3$, wobei $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

b) $U = \langle v_1, v_2, v_3\rangle \le \mathbb{R}^4$, wobei

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

c) $U = \langle v_1, v_2, v_3\rangle \le \mathbb{R}^4$ mit

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix},\ v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

d) $U = \langle w_1, w_2, w_3\rangle \le \mathbb{C}^4$ mit

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1-i \\ 0 \end{pmatrix},\ w_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1-i \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix},\ w_3 = \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 0 \\ -i \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 11.3 Betrachten Sie die Matrizen aus **Aufgabe 10.3**:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix},\quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 4 & -4 \\ 2 & -4 & 4 \end{pmatrix},\quad A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 10 & -4 \\ 2 & -4 & 4 \end{pmatrix},\quad A_4 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Finden Sie für jede dieser Matrizen eine Othonormalbasis B aus Eigenvektoren.
(Die Eigenräume, außer von A_3, sind bereits in den Lösungshinweisen zu Blatt 10 gegeben.)