Dr. Anton Malevich

Beispielaufgaben zum Thema **Abstand**

Aufgabe 2.1 ∞-Metrik
Beweisen Sie, dass die Funktion $d : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit

$$d\big((x_1, y_1), (x_2, y_2)\big) = \max\big\{|x_2 - x_1|\,, |y_2 - y_1|\big\}$$

eine Abstandsfunktion ist.

Zeichnen Sie die Mengen $B_2\big((0,0)\big)$ und $S_1\big((2,2)\big)$ bezüglich dieser Abstandsfunktion.

Aufgabe 2.2 Britische Eisenbahnmetrik

a) Beweisen Sie, dass die Funktion $d : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit

$$d\big((x_1, y_1), (x_2, y_2)\big) = \begin{cases} \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}, & \text{falls } (x_1, y_1) \parallel (x_2, y_2) \\ \sqrt{x_1^2 + y_1^2} + \sqrt{x_2^2 + y_2^2}, & \text{sonst} \end{cases}$$

eine Abstandsfunktion ist.

b) Skizzieren Sie die Mengen $B_2\big((0,0)\big)$, $B_{\sqrt{2}}\big((1,1)\big)$ und $B_2\big((1,0)\big)$.

Aufgabe 2.3 Es sei $X = \{0,1\}^n$ die Menge der n-Tupeln mit 0 und 1. Wir definieren die Funktion $d : X \times X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ durch

$$d(v, w) = \#\,\{\, i \mid v_i \neq w_i \}\,,$$

wobei $v = (v_1, \ldots, v_n)$, $w = (w_1, \ldots, w_n)$.

a) Beweisen Sie, dass d eine Abstandsfunktion ist.
(*Hinweis:* Für beliebige $u, v, w \in X$ folgt aus $v_i \neq w_i$ stets $v_i \neq u_i$ oder $u_i \neq w_i$.)

b) Es sei $X = \{0,1\}^5$. Listen Sie alle Elemente folgender Mengen auf: $S_1\big((0,0,0,0,0)\big)$, $S_2\big((0,0,0,0,0)\big)$, $B_2\big((0,0,0,0,0)\big)$, $S_3\big((0,1,1,1,0)\big)$, $S_5\big((0,1,1,1,0)\big)$.

Aufgabe 2.4 Es sei X die Menge aller stetigen Funktionen von $[0,1]$ auf $\mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass die folgenden Funktionen $d : X \times X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ Abstandsfunktionen sind. Beschreiben Sie die Mengen $B_1(\mathit{0})$ und $S_2(\mathit{0})$, wobei $\mathit{0}$ die 0-Funktion, $\mathit{0}(x) = 0$ für alle $x \in [0,1]$, bezeichnet.

a) $d(f, g) = \max\limits_{x \in [0,1]} |g(x) - f(x)|$.

b) $d(f, g) = \displaystyle\int_0^1 |g(x) - f(x)|\, dx$.