Beispielaufgaben zum Thema **Lineare Gleichungssysteme**

Aufgabe 4.1 Geben Sie jeweils die Lösungsmenge der folgenden lineare Gleichungssysteme über dem Körper K an.

a) $K = \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= -4 \\ 5x_1 - x_2 + x_3 &= 0 \\ 7x_1 + 3x_2 + 7x_3 &= -8 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 &= 11 \end{aligned}$$

b) $K = \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 + x_3 - x_5 &= 0 \\ x_1 - x_2 - 3x_3 + 2x_4 - x_5 &= 2 \\ 3x_2 - x_3 - 5x_4 - 7x_5 &= 9 \\ 3x_1 - 3x_2 - 5x_3 + 2x_4 + 5x_5 &= 2 \end{aligned}$$

c) $K = \mathbb{F}_2$,

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_5 &= 0 \\ x_1 + x_3 + x_4 + x_5 &= 1 \\ x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 1 \\ x_1 + x_2 + x_4 + x_5 &= 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 1 \end{aligned}$$

d) $K = \mathbb{F}_3$,

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 0 \\ 2x_1 + x_3 &= 1 \\ x_2 + x_3 &= 2 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Aufgabe 4.2 Es sei V Vektorraum. Untersuchen Sie die gegebenen Vektoren aus V auf lineare Unabhängigkeit.

a) $V = \mathbb{R}^3$: $\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

b) $V = \mathbb{R}^4$: $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

c) $V = \mathbb{F}_5^3$: $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

d) $V = \mathbb{F}_2^5$: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 4.3 Betrachten Sie das folgende Gleichungssystem über $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - 2x_3 &= 1 \\ 2x_2 + x_3 + x_4 &= 2 \\ x_3 - 2x_4 &= -2 \\ (\alpha - 1)x_4 &= \beta \end{aligned}$$

für Parameter $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie die Lösungsmenge für
a) $\alpha = 1$ und $\beta = 4$, b) $\alpha = 2$ und $\beta = 4$, c) $\alpha = 1$ und $\beta = 0$.

Für welche Wertepaare $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ gibt es mehr als eine Lösung?