Hinweise zu den Beispielaufgaben zum Thema **Matrizen und lineare Abbildungen**

**Aufgabe 5.1** Finden Sie zu den Unterrümen aus der **Aufgabe 3.2** jeweils eine Basis, indem Sie systematisch vorgehen: Finden Sie zuerst ein Erzeugendensystem. Schreiben Sie dann die gefundenen Vektoren in eine Matrix (als Zeilen) und bringen diese auf Dreieckgestalt.

*Hinweise.* Siehe Hinweise zu **Aufgabe 3.2**. □

**Aufgabe 5.2** Matrixmultiplikation.

a) Gegeben seien die folgenden Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Finden Sie $\operatorname{Rang} A$, $\operatorname{Rang} B$ und $\operatorname{Rang} C$ über $\mathbb{R}$ und über $\mathbb{F}_5$ (in $\mathbb{F}_5$ ist $-1 = 4$). Berechnen Sie alle möglichen Produkte von je zwei dieser Matrizen.

b) Welcher Zusammenhang besteht generell für $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ zwischen $(A^T)^m$ und $(A^m)^T$? Berechnen Sie für die Matrix $A = \left(\begin{smallmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{smallmatrix}\right)$ die Matrizen $A^5$ und $\left(A^T\right)^5$ mit so wenig Rechenaufwand wie möglich!

*Hinweise.* a) Über $\mathbb{R}$: $\operatorname{Rang} A = 4$, $\operatorname{Rang} B = 3$, $\operatorname{Rang} C = 3$.
Über $\mathbb{F}_5$: $\operatorname{Rang} A = 3$, $\operatorname{Rang} B = 3$, $\operatorname{Rang} C = 2$.

Man kann $AC$, $BA$, $BC$ und $CB$ (und $A^2 = AA$) berechnen.

b) Es gilt $(A^m)^T = (A^T)^m$.

Am schnellsten gehen die Berechnungen wie folgt:

$$A^2 = AA = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \; A^4 = (A^2)(A^2) = \begin{pmatrix} 17 & -24 & 0 \\ -12 & 17 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix},$$

$$A^5 = A^4 A = \begin{pmatrix} -41 & 58 & 0 \\ 29 & -41 & 0 \\ 0 & 0 & 32 \end{pmatrix}, \; (A^T)^5 = (A^5)^T = \begin{pmatrix} -41 & 29 & 0 \\ 58 & -41 & 0 \\ 0 & 0 & 32 \end{pmatrix}.$$

□

**Aufgabe 5.3** Es seien $V, W$ zwei $K$-Vektorräume und $f : V \to W$ eine Abbildung. Entscheiden Sie, ob $f$ linear ist. Falls nein, beweisen sie es! Falls ja (kein Beweis notwendig), geben Sie die Darstellungsmatrix von $f$ an.

a) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1^2 + 2x_2 + x_3$.

b) $f : \mathbb{F}_5^3 \to \mathbb{F}_5^3$, $f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1+3x_2+x_3 \\ x_2 \\ x_1+x_3 \end{pmatrix}$.

c) $f : K^n \to K^n$, $f\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

d) $f : K^n \to K^m$, $f\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

e) $f : K^n \to K^m$, $f\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$.

f) $f : \mathbb{F}_2^2 \to \mathbb{F}_2^3$, $f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

g) $f : \mathbb{F}_2^3 \to \mathbb{F}_2$, $f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$.

h) $f : \mathbb{F}_3^3 \to \mathbb{F}_3$, $f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{cases} 0, & \text{falls } x_1 = x_2 = x_3 = 0, \\ 2, & \text{falls unter } x_i \text{ mindestens eine 2 vorkommt,} \\ 1, & \text{sonst.} \end{cases}$

i) $f : \mathbb{F}_3^3 \to \mathbb{F}_3^2$, $f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1+2x_2 \\ (x_1+2x_2)^3+(x_2+2x_3)^3+(x_3+2x_1)^3 \end{pmatrix}$.

*Hinweise.* a) Nicht linear: $f(e_1) = 1$, $f(2e_1) = 4 \neq 2$.

b) Linear, $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

c) Linear, $A = E$.

d) Linear, $A = 0$.

e) Nicht linear: $f(e_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$, $f(2e_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 2 \\ \vdots \\ 2 \end{pmatrix}$.

f) Nicht linear: $f(e_1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $f(2e_1) = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$.

g) Linear, denn $k^2 = k$ für $k \in \mathbb{F}_2$! $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

h) Nicht linear: $f(e_1) = 2$, $f(e_2) = 1$, $f(e_1 + e_2) = 1 \neq 2$.

i) Linear, denn es gilt nach Ausklammern:

$$(x_1 + 2x_2)^3 + (x_2 + 2x_3)^3 + (x_3 + 2x_1)^3 = x_1^3 + 2x_2^3 + x_2^3 + 2x_3^3 + x_3^3 + 2x_1^3 = 0.$$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$\square$