Beispielaufgaben zum Thema **Matrizen und lineare Abbildungen**

Aufgabe 5.1 Finden Sie zu den Unterrümen aus der **Aufgabe 3.2** jeweils eine Basis, indem Sie systematisch vorgehen: Finden Sie zuerst ein Erzeugendensystem. Schreiben Sie dann die gefundenen Vektoren in eine Matrix (als Zeilen) und bringen diese auf Dreieckgestalt.

Aufgabe 5.2 Matrixmultiplikation.

a) Gegeben seien die folgenden Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Finden Sie Rang A, Rang B und Rang C über $\mathbb{R}$ und über $\mathbb{F}_5$ (in $\mathbb{F}_5$ ist $-1 = 4$). Berechnen Sie alle möglichen Produkte von je zwei dieser Matrizen.

b) Welcher Zusammenhang besteht generell für $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ zwischen $(A^T)^m$ und $(A^m)^T$? Berechnen Sie für die Matrix $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ die Matrizen A^5 und $\left(A^T\right)^5$ mit so wenig Rechenaufwand wie möglich!

Aufgabe 5.3 Es seien V, W zwei K-Vektorräume und $f : V \to W$ eine Abbildung. Entscheiden Sie, ob f linear ist. Falls nein, beweisen sie es! Falls ja (kein Beweis notwendig), geben Sie die Darstellungsmatrix von f an.

a) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1^2 + 2x_2 + x_3$.

b) $f : \mathbb{F}_5^3 \to \mathbb{F}_5^3$, $f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1+3x_2+x_3 \\ x_2 \\ x_1+x_3 \end{pmatrix}$.

c) $f : K^n \to K^n$, $f\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

d) $f : K^n \to K^m$, $f\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

e) $f : K^n \to K^m$, $f\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$.

f) $f : \mathbb{F}_2^2 \to \mathbb{F}_2^3$, $f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

g) $f : \mathbb{F}_2^3 \to \mathbb{F}_2$, $f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$.

h) $f : \mathbb{F}_3^3 \to \mathbb{F}_3$, $f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{cases} 0, & \text{falls } x_1 = x_2 = x_3 = 0, \\ 2, & \text{falls unter } x_i \text{ mindestens eine 2 vorkommt,} \\ 1, & \text{sonst.} \end{cases}$

i) $f : \mathbb{F}_3^3 \to \mathbb{F}_3^2$, $f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1+2x_2 \\ (x_1+2x_2)^3+(x_2+2x_3)^3+(x_3+2x_1)^3 \end{pmatrix}$.