Hinweise zu den Beispielaufgaben zum Thema **Bild und Kern, Inverse Matrix**

Aufgabe 6.1 Geben Sie je eine Basis von Bild und Kern der folgenden linearen Abbildungen bzw. Matrizen.

a) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1 + 2x_2 + 3x_3$.

b) $f : \mathbb{F}_2^4 \to \mathbb{F}_2^4$, $f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1+x_3+x_4 \\ x_3+x_4 \\ x_1+x_2+x_4 \\ x_1+x_2+x_3 \end{pmatrix}$.

c) $f : \mathbb{F}_5^4 \to \mathbb{F}_5^3$, $f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1+3x_2+x_3 \\ x_2+x_4 \\ x_1+x_3 \end{pmatrix}$.

d) $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

e) $A \in \mathbb{F}_3^{4\times 4}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

f) $A \in K^{n\times n}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ (die Matrix aus lauter Einsen).

Hinweise.

a) Kern $f = \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$, Bild $f = \mathbb{R} = \langle 1 \rangle$.

b) Kern $f = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$, Bild $f = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$.

c) Kern $f = \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$, Bild $f = \mathbb{F}_5^3$.

d) Kern $A = \{0\}$, Bild $f = \mathbb{R}^4$.

e) Kern $A = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$, Bild $f = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$.

f) Kern $A = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$, Bild $f = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$.

$\square$

Aufgabe 6.2 Es sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 - x_1 - x_2 \\ x_3 - x_1 \end{pmatrix}$$

a) Geben Sie die Darstellungsmatrizen von f, $g = f \circ f$ und $h = f \circ f \circ f$ an.

b) Finden Sie je eine Basis von $\operatorname{Kern} f$, $\operatorname{Bild} f$, $\operatorname{Kern} g$, $\operatorname{Bild} g$, $\operatorname{Kern} h$, $\operatorname{Bild} h$.

Hinweise. Die Darstellungsmatrizen sind:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ von } f,$$

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ von } g,$$

$$A^3 = A \cdot A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ von } h.$$

$\operatorname{Kern} f = \left\langle \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix} \right) \right\rangle$, $\operatorname{Bild} f = \left\langle \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{smallmatrix} \right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix} \right) \right\rangle$.

$\operatorname{Kern} f = \left\langle \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix} \right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix} \right) \right\rangle$, $\operatorname{Bild} f = \left\langle \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix} \right) \right\rangle$.

$\operatorname{Kern} h = V$ und $\operatorname{Bild} h = \{0\}$. $\square$

Aufgabe 6.3 Entscheiden Sie, ob die folgenden Matrizen invertierbar sind. Falls ja, geben Sie die Inverse an.

a) $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ als Matrix aus $\mathbb{F}_5^{3\times 3}$ und aus $\mathbb{F}_7^{3\times 3}$.

c) $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

d) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ als Matrix aus $\mathbb{R}^{4\times 4}$ und aus $\mathbb{F}_2^{4\times 4}$.

e) $A \in \mathbb{F}_2^{4\times 4}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

f) $A \in K^{n\times n}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ (die Matrix aus lauter Einsen).

g) $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ \lambda & 1 \end{pmatrix}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Unterscheiden Sie die Fälle $\lambda = \pm 1$, $\lambda \neq \pm 1$.

Hinweise.

a) $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{3} & \frac{5}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$.

b) nicht invertierbar über $\mathbb{F}_5$; $\quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ über $\mathbb{F}_7$.

c) $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -1 & \frac{2}{5} \\ -\frac{7}{5} & 2 & -\frac{1}{5} \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

d) nicht invertierbar über $\mathbb{F}_2$; $\quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ über $\mathbb{R}$.

e) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

f) nicht invertierbar (für $n \geq 2$).

g) nicht invertierbar für $\lambda = \pm 1$; $\quad A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{1-\lambda^2} & -\frac{\lambda}{1-\lambda^2} \\ -\frac{\lambda}{1-\lambda^2} & \frac{1}{1-\lambda^2} \end{pmatrix}$ für $\lambda \neq \pm 1$.

□