Beispielaufgaben zum Thema **Bild und Kern, Inverse Matrix**

Aufgabe 6.1 Geben Sie je eine Basis von Bild und Kern der folgenden linearen Abbildungen bzw. Matrizen.

a) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1 + 2x_2 + 3x_3$.

b) $f : \mathbb{F}_2^3 \to \mathbb{F}_2^4$, $f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1+x_3+x_4 \\ x_3+x_4 \\ x_1+x_2+x_4 \\ x_1+x_2+x_3 \end{pmatrix}$.

c) $f : \mathbb{F}_5^4 \to \mathbb{F}_5^3$, $f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1+3x_2+x_3 \\ x_2+x_4 \\ x_1+x_3 \end{pmatrix}$.

d) $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$, $A = \begin{pmatrix} 1&0&1&1 \\ 0&0&1&1 \\ 1&1&0&1 \\ 1&1&1&0 \end{pmatrix}$.

e) $A \in \mathbb{F}_3^{4\times 4}$, $A = \begin{pmatrix} 1&0&1&1 \\ 0&2&1&0 \\ 0&1&2&1 \\ 1&0&1&2 \end{pmatrix}$.

f) $A \in K^{n\times n}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ (die Matrix aus lauter Einsen).

Aufgabe 6.2 Es sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 - x_1 - x_2 \\ x_3 - x_1 \end{pmatrix}$$

a) Geben Sie die Darstellungsmatrizen von f, $g = f \circ f$ und $h = f \circ f \circ f$ an.

b) Finden Sie je eine Basis von $\operatorname{Kern} f$, $\operatorname{Bild} f$, $\operatorname{Kern} g$, $\operatorname{Bild} g$, $\operatorname{Kern} h$, $\operatorname{Bild} h$.

Aufgabe 6.3 Entscheiden Sie, ob die folgenden Matrizen invertierbar sind. Falls ja, geben Sie die Inverse an.

a) $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, $A = \begin{pmatrix} 1&2&0 \\ 0&1&1 \\ 2&-1&1 \end{pmatrix}$.

b) $A = \begin{pmatrix} 1&2&3 \\ 4&0&1 \\ 2&3&4 \end{pmatrix}$ als Matrix aus $\mathbb{F}_5^{3\times 3}$ und aus $\mathbb{F}_7^{3\times 3}$.

c) $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, $A = \begin{pmatrix} 1&2&3 \\ 1&2&2 \\ 3&1&-1 \end{pmatrix}$.

d) $A = \begin{pmatrix} 1&0&1&1 \\ 0&0&1&1 \\ 1&1&0&1 \\ 1&1&1&0 \end{pmatrix}$ als Matrix aus $\mathbb{R}^{4\times 4}$ und aus $\mathbb{F}_2^{4\times 4}$.

e) $A \in \mathbb{F}_2^{4\times 4}$, $A = \begin{pmatrix} 1&1&1&1 \\ 1&0&1&1 \\ 1&1&0&1 \\ 1&1&1&0 \end{pmatrix}$.

f) $A \in K^{n\times n}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ (die Matrix aus lauter Einsen).

g) $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ \lambda & 1 \end{pmatrix}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Unterscheiden Sie die Fälle $\lambda = \pm 1$, $\lambda \neq \pm 1$.