Hinweise zu den Beispielaufgaben zum Thema **Koordinaten, Basiswechsel**

Aufgabe 7.1 Basen in $\mathbb{R}^2$.

a) Es sei $v_1 = (-1, 3)$, $v_2 = (2, 1)$. Berechnen Sie die Koordinaten von $(-1, 1)$, $(1, 4)$, $(-3, 2)$ und $(0, 7)$ bezüglich der Basis $\{v_1, v_2\}$.

b) Es sei $v_1 = (1, 1)$, $v_2 = (-1, 1)$. Berechnen Sie die Koordinaten von $(-1, 1)$, $(0, 2)$, $(-4, 0)$ und $(1, 5)$ bezüglich der Basis $\{v_1, v_2\}$.

c) Es seien die Vektoren $v_1 = (\lambda-1, \lambda)$ und $v_2 = (\mu-3, \mu)$ gegeben. Für welche $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ist $\{v_1, v_2\}$ eine Basis von $\mathbb{R}^2$?

Hinweise.

Die Koordinaten des Vektors w bezüglich der Basis $\{v_1, v_2\}$ sind die Zahlen x_1, x_2, sodass es $w = x_1 v_1 + x_2 v_2$ gilt

a) Die entsprechenden Koordinaten sind:
von $(-1, 1)$: $\frac{3}{7}, -\frac{2}{7}$;
von $(1, 4)$: $1, 1$;
von $(-3, 2)$: $1, -1$;
von $(0, 7)$: $2, 1$.

b) Die entsprechenden Koordinaten sind:
von $(-1, 1)$: $0, 1$;
von $(0, 2)$: $1, 1$;
von $(-4, 0)$: $-2, 2$;
von $(-1, 1)$: $3, 2$.

c) $\{v_1, v_2\}$ ist genau dann eine Basis, wenn die Rang $\left(\begin{smallmatrix}\lambda-1 & \mu-3\\ \lambda & \mu\end{smallmatrix}\right) = 2$ ist.

$$\begin{pmatrix}\lambda-1 & \mu-3\\ \lambda & \mu\end{pmatrix}\begin{bmatrix}+II\\ \end{bmatrix} \sim \begin{pmatrix}-1 & -3\\ \lambda & \mu\end{pmatrix}\begin{bmatrix}\\ +\lambda I\end{bmatrix} \sim \begin{pmatrix}-1 & -3\\ 0 & \mu-3\lambda\end{pmatrix}$$

und die Matrix hat Rang 2 genau dann, wenn $\mu \neq 3\lambda$ ist.

□

Aufgabe 7.2 $S = \{e_1, e_2, e_3\}$ ist die Standardbasis von $\mathbb{F}_7^3$.
Die Basis $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ von $\mathbb{F}_7^3$ ist gegeben durch

$$e_1 = 3v_1 + 4v_2 + v_3, \quad e_2 = 4v_1 + 5v_2 + 5v_3, \quad e_3 = v_1 + 5v_2 + v_3.$$

Geben Sie die Basiswechselmatrizen $C_{B,S}$ und $C_{S,B}$ sowie $\gamma_S(v_1)$, $\gamma_S(v_2)$ und $\gamma_S(v_3)$ an.

Hinweise. Da die Koordinaten der Basisvektoren aus S in Basis B gegeben sind, haben wir die Matrix

$$C_{B,S} = \begin{pmatrix}3 & 4 & 1\\ 4 & 5 & 5\\ 1 & 5 & 1\end{pmatrix} \quad \text{und finden } C_{S,B} = (C_{B,S})^{-1} = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 3\\ 1 & 3 & 6\end{pmatrix}.$$

Nach Definition der Basiswechselmatrix sind $\gamma_S(v_1)$, $\gamma_S(v_2)$ und $\gamma_S(v_3)$ genau die **Spalten** der Matrix $C_{S,B}$. □

Aufgabe 7.3 S ist die Standardbasis des Vektorraumes V, und B ist eine weitere Basis.

a) $V = \mathbb{R}^3$, $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$, $\gamma_B(u) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie $\gamma_S(u)$.

b) $V = \mathbb{R}^3$, $B = \left\{ \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$, $\gamma_B(v) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\gamma_S(w) = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Finden Sie die Matrizen $C_{S,B}$ und $C_{B,S}$ und bestimmen Sie $\gamma_S(v)$ und $\gamma_B(w)$.

c) $V = \mathbb{F}_2^4$, $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$, $\gamma_S(v) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\gamma_B(w) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Finden Sie die Matrizen $C_{S,B}$ und $C_{B,S}$ und bestimmen Sie $\gamma_B(v)$ und $\gamma_S(w)$.

d) $V = \mathbb{F}_3^3$, $B = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$, $\gamma_S(v) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\gamma_B(w) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Finden Sie die Matrizen $C_{S,B}$ und $C_{B,S}$ und bestimmen Sie $\gamma_B(v)$ und $\gamma_S(w)$.

Hinweise.

a) Gegeben ist die Matrix

$$C_{S,B} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und wir finden } \gamma_S(u) = C_{S,B} \cdot \gamma_B(u) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

b) Gegeben ist die Matrix

$$C_{S,B} = \begin{pmatrix} -4 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und wir finden } C_{B,S} = (C_{B,S})^{-1} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -3 & 3 & 6 \\ 2 & -5 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$\gamma_S(v) = C_{S,B} \cdot \gamma_B(v) = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_B(w) = C_{B,S} \cdot \gamma_S(w) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

c) Gegeben ist die Matrix

$$C_{S,B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und wir finden } C_{B,S} = (C_{B,S})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\gamma_B(v) = C_{B,S} \cdot \gamma_S(v) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \gamma_S(w) = C_{S,B} \cdot \gamma_B(w) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

d) Gegeben ist die Matrix

$$C_{S,B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und wir finden } C_{B,S} = (C_{B,S})^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\gamma_B(v) = C_{B,S} \cdot \gamma_S(v) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_S(w) = C_{S,B} \cdot \gamma_B(w) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

□

Aufgabe 7.4 Es seien $V = \mathbb{R}^2$ und $W = \mathbb{R}^3$ mit Standardbasen $S = \{s_1, s_2\}$ und $T = \{t_1, t_2, t_3\}$. Es seien ferner zwei weitere Basen gegeben: $S' = \{v_1, v_2\}$ von V und $T' = \{w_1, w_2, w_3\}$ von W, wobei

$$\begin{aligned} &v_1 = s_1 - s_2, \quad v_2 = -2s_1 + s_2,\\ &w_1 = t_1 - t_3, \quad w_2 = t_2 + t_3, \quad w_3 = t_3. \end{aligned}$$

Es sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung mit $f(v_1) = w_1$ und $f(v_2) = w_2$. Die Darstellungsmatrix von f bzgl. der Basen S' und T' ist also

$$D_{T',S'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Darstellungsmatrizen $D_{T,S'}$ und $D_{T,S}$ von f.

Hinweise. Zuerst schreiben wir die gegebenen Basiswechselmatrizen aus. Es gilt

$$C_{S,S'} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } C_{T,T'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) $D_{T,S'} = C_{T,T'}D_{T',S'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$

b) $D_{T,S} = D_{T,S'}C_{S',S} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$
da $C_{S',S} = (C_{S,S'})^{-1} = \left(\begin{smallmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -1 \end{smallmatrix}\right)$ ist.

□

Aufgabe 7.5 S ist die Standardbasis des Vektorraumes V, und B ist eine weitere Basis, Gegeben ist ist eine lineare Abbildung $f : V \to V$. Bestimmen Sie die Darstellungsmatrizen $D_{S,S}$ und $D_{B,B}$ von f.

a) $V = \mathbb{Q}^3$, $B = \left\{\left(\begin{smallmatrix} 1\\1\\1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1\\2\\1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 3\\1\\1 \end{smallmatrix}\right)\right\}$, $f\left(\begin{smallmatrix} x_1\\x_2\\x_3 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} x_1+2x_2\\x_2+x_3\\2x_1-x_2+x_3 \end{smallmatrix}\right)$.

b) $V = \mathbb{Q}^3$, $B = \left\{\left(\begin{smallmatrix} 1\\1\\1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1\\2\\1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 3\\1\\1 \end{smallmatrix}\right)\right\}$, $D_{B,B}(f) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 0\\0 & 1 & 1\\2 & -1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.

c) $V = \mathbb{F}_2^3$, $B = \left\{\left(\begin{smallmatrix} 1\\0\\1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1\\1\\1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1\\0\\0 \end{smallmatrix}\right)\right\}$, $D_{S,B}(f) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 & 1\\1 & 1 & 1\\1 & 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.

d) $V = \mathbb{R}^3$, $v_1 = \left(\begin{smallmatrix} 1\\1\\1 \end{smallmatrix}\right)$, $v_2 = \left(\begin{smallmatrix} 1\\2\\1 \end{smallmatrix}\right)$, $v_3 = \left(\begin{smallmatrix} 3\\1\\1 \end{smallmatrix}\right)$, $B = \{v_1, v_2, v_3\}$,
$f(e_1) = v_1$, $f(e_2) = v_2$, $f(e_3) = v_3$.
(*Hinweis:* Bestimmen Sie zuerst $\gamma_B(f(e_1))$, $\gamma_B(f(e_2))$, $\gamma_B(f(e_3))$.)

Hinweise.

a) Gegeben sind die Matrizen

$$C_{S,B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad D_{S,S} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Wir finden

$$C_{B,S} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 & \frac{5}{2} \\ 0 & 1 & -1 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \text{ und } D_{B,B} = C_{B,S} D_{S,S} C_{S,B} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -3 & \frac{21}{2} \\ 0 & 2 & -4 \\ \frac{1}{2} & 2 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

b) Gegeben sind die Matrizen

$$C_{S,B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad D_{B,B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Wir finden

$$C_{B,S} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 & \frac{5}{2} \\ 0 & 1 & -1 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \text{ und } D_{S,S} = C_{S,B} D_{B,B} C_{B,S} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & -7 & \frac{31}{2} \\ 0 & 0 & 3 \\ -\frac{1}{2} & -1 & \frac{9}{2} \end{pmatrix}.$$

c) Gegeben sind die Matrizen

$$C_{S,B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad D_{S,B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Wir finden

$$C_{B,S} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \; D_{S,S} = D_{S,B} C_{B,S} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; D_{B,B} = C_{B,S} D_{S,B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

d) Gegeben ist die Matrix

$$C_{S,B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ sowie } \gamma_B(f(e_1)) = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \; \gamma_B(f(e_2)) = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \; \gamma_B(f(e_3)) = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right).$$

Somit gilt

$$C_{B,S} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 & \frac{5}{2} \\ 0 & 1 & -1 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \text{und } D_{B,S} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und wir finden

$$D_{S,S} = C_{S,B} D_{B,S} = C_{S,B}, \; D_{B,B} = D_{B,S} C_{S,B} = C_{B,S}.$$

□

Aufgabe 7.6 $S = \{e_1, e_2, e_3\}$ ist die Standardbasis von $\mathbb{R}^3$.
Gegeben seien Vektoren $v_1 = \left(\begin{smallmatrix}1\\0\\3\end{smallmatrix}\right)$, $v_2 = \left(\begin{smallmatrix}2\\1\\0\end{smallmatrix}\right)$, $v_3 = \left(\begin{smallmatrix}2\\0\\1\end{smallmatrix}\right)$.

a) Zeigen Sie, dass $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ eine Basis von $\mathbb{R}^3$ ist.
Berechnen Sie die Basiswechselmatrizen $C_{B,S}$ und $C_{S,B}$.

b) Die lineare Abbildung $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ist gegeben durch

$$g(v_1) = e_1, \quad g(v_2) = e_2, \quad g(v_3) = e_3.$$

Geben Sie die Darstellungsmatrizen $D_{S,B}$, $D_{S,S}$, $D_{B,S}$ und $D_{B,B}$ von g an.

Hinweise.

a) Es gilt

$$C_{S,B} = \begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\0 & 1 & 0\\3 & 0 & 1\end{pmatrix}, \quad C_{B,S} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}-1 & 2 & 2\\0 & 1 & 0\\3 & -6 & -1\end{pmatrix}.$$

b) Für g gilt es

$$D_{S,B} = [\gamma_S(f(v_1)), \gamma_S(f(v_2)), \gamma_S(f(v_2))] = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

und ferner

$$\begin{aligned} D_{S,S} &= D_{S,B}C_{B,S} = C_{B,S},\\ D_{B,B} &= C_{B,S}D_{S,B} = C_{B,S},\\ D_{B,S} &= D_{B,B}C_{B,S} = C_{B,S}C_{B,S} = \frac{1}{25}\begin{pmatrix}7 & -4 & -4\\0 & 1 & 0\\-6 & -18 & 7\end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$\square$