Beispielaufgaben zum Thema **Koordinaten, Basiswechsel**

Aufgabe 7.1 Basen in $\mathbb{R}^2$.

a) Es sei $v_1 = (-1,3)$, $v_2 = (2,1)$. Berechnen Sie die Koordinaten von $(-1,1)$, $(1,4)$, $(-3,2)$ und $(0,7)$ bezüglich der Basis $\{v_1, v_2\}$.

b) Es sei $v_1 = (1,1)$, $v_2 = (-1,1)$. Berechnen Sie die Koordinaten von $(-1,1)$, $(0,2)$, $(-4,0)$ und $(1,5)$ bezüglich der Basis $\{v_1, v_2\}$.

c) Es seien die Vektoren $v_1 = (\lambda-1, \lambda)$ und $v_2 = (\mu-3, \mu)$ gegeben. Für welche $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ist $\{v_1, v_2\}$ eine Basis von $\mathbb{R}^2$?

Aufgabe 7.2 $S = \{e_1, e_2, e_3\}$ ist die Standardbasis von $\mathbb{F}_7^3$.
Die Basis $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ von $\mathbb{F}_7^3$ ist gegeben durch

$$e_1 = 3v_1 + 4v_2 + v_3, \quad e_2 = 4v_1 + 5v_2 + 5v_3, \quad e_3 = v_1 + 5v_2 + v_3.$$

Geben Sie die Basiswechselmatrizen $C_{B,S}$ und $C_{S,B}$ sowie $\gamma_S(v_1)$, $\gamma_S(v_2)$ und $\gamma_S(v_3)$ an.

Aufgabe 7.3 S ist die Standardbasis des Vektorraumes V, und B ist eine weitere Basis.

a) $V = \mathbb{R}^3$, $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$, $\gamma_B(u) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie $\gamma_S(u)$.

b) $V = \mathbb{R}^3$, $B = \left\{ \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$, $\gamma_B(v) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\gamma_S(w) = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Finden Sie die Matrizen $C_{S,B}$ und $C_{B,S}$ und bestimmen Sie $\gamma_S(v)$ und $\gamma_B(w)$.

c) $V = \mathbb{F}_2^4$, $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$, $\gamma_S(v) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\gamma_B(w) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Finden Sie die Matrizen $C_{S,B}$ und $C_{B,S}$ und bestimmen Sie $\gamma_B(v)$ und $\gamma_S(w)$.

d) $V = \mathbb{F}_3^3$, $B = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$, $\gamma_S(v) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\gamma_B(w) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Finden Sie die Matrizen $C_{S,B}$ und $C_{B,S}$ und bestimmen Sie $\gamma_B(v)$ und $\gamma_S(w)$.

Aufgabe 7.4 Es seien $V = \mathbb{R}^2$ und $W = \mathbb{R}^3$ mit Standardbasen $S = \{s_1, s_2\}$ und $T = \{t_1, t_2, t_3\}$. Es seien ferner zwei weitere Basen gegeben: $S' = \{v_1, v_2\}$ von V und $T' = \{w_1, w_2, w_3\}$ von W, wobei

$$v_1 = s_1 - s_2, \quad v_2 = -2s_1 + s_2,$$
$$w_1 = t_1 - t_3, \quad w_2 = t_2 + t_3, \quad w_3 = t_3.$$

Es sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung mit $f(v_1) = w_1$ und $f(v_2) = w_2$. Die Darstellungsmatrix von f bzgl. der Basen S' und T' ist also

$$D_{T',S'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Darstellungsmatrizen $D_{T,S'}$ und $D_{T,S}$ von f.

Aufgabe 7.5 S ist die Standardbasis des Vektorraumes V, und B ist eine weitere Basis, Gegeben ist ist eine lineare Abbildung $f : V \to V$. Bestimmen Sie die Darstellungsmatrizen $D_{S,S}$ und $D_{B,B}$ von f.

a) $V = \mathbb{Q}^3$, $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$, $f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1+2x_2 \\ x_2+x_3 \\ 2x_1-x_2+x_3 \end{pmatrix}$.

b) $V = \mathbb{Q}^3$, $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$, $D_{B,B}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

c) $V = \mathbb{F}_2^3$, $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$, $D_{S,B}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

d) $V = \mathbb{R}^3$, $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $B = \{v_1, v_2, v_3\}$,
$f(e_1) = v_1$, $f(e_2) = v_2$, $f(e_3) = v_3$.
(*Hinweis:* Bestimmen Sie zuerst $\gamma_B(f(e_1))$, $\gamma_B(f(e_2))$, $\gamma_B(f(e_3))$.)

Aufgabe 7.6 $S = \{e_1, e_2, e_3\}$ ist die Standardbasis von $\mathbb{R}^3$.
Gegeben seien Vektoren $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

a) Zeigen Sie, dass $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ eine Basis von $\mathbb{R}^3$ ist.
Berechnen Sie die Basiswechselmatrizen $C_{B,S}$ und $C_{S,B}$.

b) Die lineare Abbildung $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ist gegeben durch

$$g(v_1) = e_1, \quad g(v_2) = e_2, \quad g(v_3) = e_3.$$

Geben Sie die Darstellungsmatrizen $D_{S,B}$, $D_{S,S}$, $D_{B,S}$ und $D_{B,B}$ von g an.