Hinweise zu den Beispielaufgaben zum Thema **Determinante, Polynome**

Aufgabe 8.1 Berechnen Sie die Determinanten folgender Matrizen:

a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ über $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{F}_2$.

b) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & a \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & b & -1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ b & a+b & b \\ 0 & a & 0 \end{pmatrix}$ über $\mathbb{R}$

in Abhängigkeit von $a, b \in \mathbb{R}$.

Hinweise. a) Wir entwickeln jeweils nach der ersten Spalte:

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = (-1)^{2+1} \cdot 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + (-1)^{3+1} \cdot 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$[\text{über } \mathbb{Q}] = (-1) \cdot (-1) + 1 = 2$$

$$[\text{über } \mathbb{F}_2] = 1 \cdot 1 + 1 = 0.$$

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = (-1) \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$+ (-1) \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -\left(\det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$+ \left(\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right) - \left(\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$= -(1-0) + (-1+0) - (1+0)$$

$$[\text{über } \mathbb{Q}] = -3$$

$$[\text{über } \mathbb{F}_2] = 1.$$

b) Wir entwickeln hier nach der zweiten Zeile:

$$\det \begin{pmatrix} -1 & 0 & a \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & b & -1 \end{pmatrix} = 2 \cdot \det \begin{pmatrix} -1 & a \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = 2(1-a).$$

Entwicklung nach der ersten Zeile liefert

$$\det \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ b & a+b & b \\ 0 & a & 0 \end{pmatrix} = -a \cdot \det \begin{pmatrix} b & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0.$$

□

Aufgabe 8.2 Berechnen Sie die Determinante der Matrix A und entscheiden Sie in Abhängigkeit von $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$, ob A invertierbar ist.

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & a & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{b) } A = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{pmatrix}, \quad \text{c) } A = \begin{pmatrix} a & 3 & 0 & 5 \\ 0 & b & 0 & 2 \\ 1 & 2 & c & 3 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{pmatrix}.$$

Hinweise. a) $\det A =$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & a & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot \det \begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & a & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} - (-1) \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \left(a \cdot \det \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & a \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right) + (-1) \cdot \det \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$$
$$= (-a) + (-a) - a^2 = -2a - a^2 = -a(2+a)$$

A invertierbar $\Leftrightarrow \det A \neq 0$, d.h. $a \neq 0$ und $a \neq -2$.

b) $\det A =$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} b & b^2 \\ c & c^2 \end{pmatrix} - \det \begin{pmatrix} a & a^2 \\ c & c^2 \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} a & a^2 \\ b & b^2 \end{pmatrix}$$
$$= bc^2 - cb^2 - ac^2 + ca^2 + ab^2 - ba^2$$
$$= \big(bc^2 - ac^2\big) + \big(ca^2 - cb^2\big) + \big(ab^2 - ba^2\big)$$
$$= c^2(b-a) + c(a-b)(a+b) + ab(b-a)$$
$$= (b-a)\big(c^2 - ac - bc + ab\big) = (b-a)(c-b)(c-a)$$

A invertierbar $\Leftrightarrow a, b, c$ alle paarweise verschieden.

c) $\det A =$

$$\det \begin{pmatrix} a & 3 & 0 & 5 \\ 0 & b & 0 & 2 \\ 1 & 2 & c & 3 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{pmatrix} = (-1)^{4+4} \cdot d \cdot \det \begin{pmatrix} a & 3 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 1 & 2 & c \end{pmatrix}$$
$$= (-1)^{3+3} \cdot d \cdot c \det \begin{pmatrix} a & 3 \\ 0 & b \end{pmatrix} = abcd$$

A invertierbar $\Leftrightarrow abcd \neq 0$.

□

Aufgabe 8.3 Berechnen Sie die folgenden Determinanten mit Gauß-Algorithmus:

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{b) } A = \begin{pmatrix} 0 & a & a & \cdots & a \\ a & 0 & a & \cdots & a \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ a & \cdots & a & 0 & a \\ a & \cdots & a & a & 0 \end{pmatrix},$$

Hinweise.

a)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} -Z_4 \\ -Z_4 \\ -Z_4 \\ \end{array} \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ +Z_1 + Z_2 + Z_3 \end{array}$$

$$\sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = A' \text{ mit } \det A' = -3.$$

Somit gilt $\det A = \det A' = -3$.

b)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & a & \cdots & a \\ a & 0 & a & \cdots & a \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ a & \cdots & a & 0 & a \\ a & \cdots & a & a & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} -Z_n \\ -Z_n \\ \vdots \\ -Z_n \\ \end{array}$$

$$\sim \begin{pmatrix} -a & 0 & 0 & \cdots & a \\ 0 & -a & 0 & \cdots & a \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & -a & a \\ a & \cdots & a & a & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ +Z_1 + \ldots + Z_{n-1} \end{array}$$

$$\sim \begin{pmatrix} -a & 0 & 0 & \cdots & a \\ 0 & -a & 0 & \cdots & a \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & -a & a \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & (n-1)a \end{pmatrix} = A',$$

wobei $\det A = \det A' = (-a)^{n-1}(n-1)a = (-1)^{n-1}(n-1)a^n$.

Teil a) kriegt man auch durch Einsetzen von $a = 1$, $n = 4$ in Teil b)!

$\square$

Aufgabe 8.4 Berechnen Sie die Determinanten folgender Matrizen:

$$\text{a)} \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{9}{2} & -\frac{3}{2} & -3 \\ \frac{5}{3} & -\frac{8}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{7}{3} \\ \frac{4}{3} & -\frac{5}{3} & -1 & -\frac{2}{3} \\ 7 & -8 & -4 & -5 \end{pmatrix}, \quad \text{b)} \begin{pmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Hinweise.

a)

$$A = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{9}{2} & -\frac{3}{2} & -3 \\ \frac{5}{3} & -\frac{8}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{7}{3} \\ \frac{4}{3} & -\frac{5}{3} & -1 & -\frac{2}{3} \\ 7 & -8 & -4 & -5 \end{pmatrix} \begin{matrix} \times\boxed{2} \\ \times\boxed{3} \\ \times\boxed{3} \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & -9 & -3 & -6 \\ 5 & -8 & -2 & -7 \\ 4 & -5 & -3 & -2 \\ 7 & -8 & -4 & -5 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ -Z_1 \\ -Z_1 \\ -2Z_2 \end{matrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 3 & -9 & -3 & -6 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 0 & 4 \\ -3 & 8 & 0 & 9 \end{pmatrix} \begin{matrix} +3Z_2 \\ \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 9 & -6 & 0 & -9 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 0 & 4 \\ -3 & 8 & 0 & 9 \end{pmatrix} = A_2.$$

Entwicklung nach der dritten Spalte liefert $\det A_2 = -\det A_3$ mit

$$A_3 = \begin{pmatrix} 9 & -6 & -9 \\ 1 & 4 & 4 \\ -3 & 8 & 9 \end{pmatrix} \begin{matrix} \times\boxed{1/3} \\ \\ +3Z_2 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & -2 & -3 \\ 1 & 4 & 4 \\ 0 & 20 & 21 \end{pmatrix} \begin{matrix} -3Z_2 \\ \\ \end{matrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 0 & -14 & -15 \\ 1 & 4 & 4 \\ 0 & 20 & 21 \end{pmatrix} = A_4.$$

$\det A_4 = -(-14 \cdot 21 + 15 \cdot 20) = -6$. Es folgt: $\det A_3 = 3 \cdot \det A_4 = -18$, $\det A_2 = 18$ und $\det A = \frac{\det A_2}{2 \cdot 3 \cdot 3} = 1$.

b)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ +Z_1 \\ -2Z_1 \\ -Z_1 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A_2.$$

Entwicklung nach der dritten Spalte liefert $\det A_2 = \det A_3$, wobei

$$A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Wir erhalten: $\det A = \det A_3 = -9$. □

Aufgabe# 8.5 Es bezeichne D_n die folgende Determinante:

$$D_n = \det \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}}_{n}.$$

Beweisen Sie mit Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ stets $D_n = n + 1$ gilt.
(*Hinweis:* Entwickeln Sie die Determinante nach der ersten Spalte und ermitteln Sie eine rekursive Formel für D_n.)

Hinweise. Wir beweisen die Formel mit Induktion nach n.

IA) $n = 1 : \det(2) = 2 = 1 + 1$.
$n = 2 : \det\left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix}\right) = 3 = 2 + 1$. ✓

IV) Es gelte für alle $k < n$: $D_k = k + 1$.

IS) Wir zeigen die Formel für n. Die Entwicklung nach der ersten Spalte liefert

$$D_n = 2 \cdot \det \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}}_{n-1} - 1 \cdot \det \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}}_{n-1}$$

$$= 2D_{n-1} - \det \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}}_{n-2} = 2D_{n-1} - D_{n-2}$$

$$\overset{\text{IV}}{=} 2(n - 1 + 1) - (n - 2 + 1) = n + 1. \checkmark$$

□

Aufgabe 8.6 Finden Sie alle Nustellen des gegebenen Polynoms $f(x) \in K[x]$ für den gegebenen Körper K. Schreiben Sie $f(x) = (x - \alpha_1) \cdots (x - \alpha_k) g(x)$, wobei $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ die Nustellen von $f(x)$ sind, und $g(x)$ **keine** Nulstellen hat. (Die α_i sind nicht unbedingt verschieden.)

Beispiel: $K = \mathbb{R}$, $f(x) = x^5 - x^4 + x^3 - x^2$.
Die Nullstellen sind 0 (zweifach) und 1, und es gilt: $f(x) = x^2(x-1)(x^2+1)$.

a) $K = \mathbb{F}_2$, $f(x) = x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x + 1$.

b) $K = \mathbb{F}_2$, $f(x) = x^5 + x^3 + x + 1$.

c) $K = \mathbb{F}_2$, $f(x) = x^5 + x^4 + x^3 + x^2$.

d) $K = \mathbb{F}_3$, $f(x) = x^4 + x^2 + 1$.

e) $K = \mathbb{F}_3$, $f(x) = x^6 + 2x^5 + x^4 + 2x^3 + x^2 + 2x$.

f) $K = \mathbb{F}_3$, $f(x) = x^5 + x^4 + x^3 + x^2$.

g) $K = \mathbb{F}_5$, $f(x) = x^5 + x^4 + x^3 + x^2$.

h) $K = \mathbb{F}_5$, $f(x) = x^5 + 4x$.

i) $K = \mathbb{F}_7$, $f(x) = x^6 + 3x^5 + 6x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 6x + 2$.

j) $K = \mathbb{Q}$, $f(x) = 2x^5 + 3x^4 - 4x^3 - 7x^2 + 2$.

k) $K = \mathbb{R}$, $f(x) = 2x^5 + 3x^4 - 4x^3 - 7x^2 + 2$.

Hinweise.

a) $f(x) = (x+1)\left(x^5 + x^3 + 1\right)$, NS: 1.

b) $f(x) = (x+1)\left(x^4 + x^3 + 1\right)$, NS: 1.

c) $f(x) = x^2(x+1)^3$, NS: 0 (zweifach) und 1 (dreifach).

d) $f(x) = (x+1)^2(x+2)^2$, NS: 2 (zweifach) und 1 (zweifach).

e) $f(x) = x(x+1)^2(x+2)^3$, NS: 0, 2 (zweifach) und 1 (dreifach).

f) $f(x) = x^2(x+1)\left(x^2+1\right)$, NS: 0 (zweifach) und 2.

g) $f(x) = x^2(x+1)(x+2)(x+3)$, NS: 0 (zweifach), 4, 3, 2.

h) $f(x) = x(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)$, NS: 0, 4, 3, 2, 1.

i) $f(x) = (x+1)^2(x+3)(x+5)\left(x^2+2\right)$, NS: 6 (zweifach), 4, 2.

j) $f(x) = (x+1)^2(2x-1)\left(x^2-2\right)$, NS: -1 (zweifach), $\frac{1}{2}$.

k) $f(x) = (x+1)^2(2x-1)\left(x-\sqrt{2}\right)\left(x+\sqrt{2}\right)$, NS: -1 (zweifach), $\frac{1}{2}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{-2}$.

$\square$

Aufgabe 8.7 Es sei K ein Körper.
Für ein Polynom $p(X) = a_k x^k + \ldots + a_1 x + a_0 \in K[x]$ und eine Matrix $A \in K^{n\times n}$ definieren wir eine Matrix $p(A) \in K^{n\times n}$ durch

$$p(A) = a_k A^k + \ldots + a_1 A + a_0 I_n.$$

Berechnen Sie $p(A)$ und $\det p(A)$ über $\mathbb{R}$ und über $\mathbb{F}_2$, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } p(X) = x^3 - x^2 + x + 1.$$

Hinweise. Es gilt (über $\mathbb{R}$):

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \text{ und } A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Somit erhalten wir: $p(A) = A^3 - A^2 + A + I_3 =$

$$-\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & -5 & 4 \end{pmatrix},$$

und $\det p(A) = 1$.

Über $\mathbb{F}_2$ haben wir:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},\ A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ und } A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

und somit

$$p(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \det p(A) = 1.$$

□

Aufgabe# 8.8 Es sei K ein Körper und es seien $a_0, \ldots, a_{n-1} \in K$.
Zeigen Sie:

$$\det \begin{pmatrix} x & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ -1 & x & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & -1 & x & \cdots & 0 & a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & x & a_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & -1 & x + a_{n-1} \end{pmatrix} = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

mittels

a) Laplace-Entwicklung (d.h. nach Definition),

b) elementarer Zeilenumformungen.

Hinweise. a) Entwicklung nach der letzten Spalte liefert: $\det A = (-1)^{1+n} a_0 \det A_{1,n} + (-1)^{2+n} a_1 \det A_{2,n} + \ldots + (-1)^{2n}(X + a_{n-1}) \det A_{n,n}$, wobei

$$\begin{aligned}
\det A_{1,n} &= \det \begin{pmatrix} -1 & x & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 \end{pmatrix} = (-1)^{n-1}, \\
\det A_{2,n} &= \det \begin{pmatrix} x & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & X & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 \end{pmatrix} = (-1)^{n-2} \cdot x, \\
&\vdots \\
\det A_{n-2,n} &= (-1) \cdot x^{n-2}, \\
\det A_{n,n} &= x^{n-1}(x + a_{n-1}) = x^n + x^{n-1} a_{n-1}.
\end{aligned}$$

Nach Einsetzen erhalten wir die Formel.

Es gilt daher:

$$\begin{aligned}
\det A &= x^{n-1}(x + a_{n-1}) + a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n-2} x^{n-2} \\
&= a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n-2} x^{n-2} + a_{n-1} x^{n-1} + x^n.
\end{aligned}$$

b) Zuerst bringen wir die erste Zeile nach unten (dazu brauchen wir $n-1$ Vertauschungen: $Z_1 \leftrightarrow Z_2, Z_2 \leftrightarrow Z_3, \ldots, Z_{n-1} \leftrightarrow Z_n$)

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} -1 & x & \cdots & a_1 \\ 0 & -1 & \cdots & a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & x + a_{n-1} \\ x & 0 & \cdots & a_0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ +x \cdot Z_1 \end{matrix} \\
\sim &\begin{pmatrix} -1 & x & \cdots & a_1 \\ 0 & -1 & \cdots & a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & x + a_{n-1} \\ 0 & x^2 & \cdots & a_0 + a_1 x \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ +X^2 \cdot Z_2 \end{matrix} \\
\sim \ldots \sim &\begin{pmatrix} -1 & x & \cdots & a_1 \\ 0 & -1 & \cdots & a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & x + a_{n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & a_0 + x a_1 + \ldots + x^{n-1}(x + a_{n-1}) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Es folgt:

$$\begin{aligned}
\det A &= \underbrace{(-1)^{n-1}}_{\text{Vertauschungen}} \cdot (-1)^{n-1}(a_0 + \ldots + x^{n-1} a_{n-1} + x^n) \\
&= a_0 + \ldots + x^{n-1} a_{n-1} + x^n.
\end{aligned}$$

□