Beispielaufgaben zum Thema **Determinante, Polynome**

Aufgabe 8.1 Berechnen Sie die Determinanten folgender Matrizen:

a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ über $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{F}_2$.

b) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & a \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & b & -1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ b & a+b & b \\ 0 & a & 0 \end{pmatrix}$ über $\mathbb{R}$

in Abhängigkeit von $a, b \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 8.2 Berechnen Sie die Determinante der Matrix A und entscheiden Sie in Abhängigkeit von $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$, ob A invertierbar ist.

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & a & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{b) } A = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{pmatrix}, \quad \text{c) } A = \begin{pmatrix} a & 3 & 0 & 5 \\ 0 & b & 0 & 2 \\ 1 & 2 & c & 3 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 8.3 Berechnen Sie die folgenden Determinanten mit Gauß-Algorithmus:

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{b) } A = \begin{pmatrix} 0 & a & a & \cdots & a \\ a & 0 & a & \cdots & a \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ a & \cdots & a & 0 & a \\ a & \cdots & a & a & 0 \end{pmatrix},$$

Aufgabe 8.4 Berechnen Sie die Determinanten folgender Matrizen:

$$\text{a) } \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{9}{2} & -\frac{3}{2} & -3 \\ \frac{5}{3} & -\frac{8}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{7}{3} \\ \frac{4}{3} & -\frac{5}{3} & -1 & -\frac{2}{3} \\ 7 & -8 & -4 & -5 \end{pmatrix}, \quad \text{b) } \begin{pmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe# 8.5 Es bezeichne D_n die folgende Determinante:

$$D_n = \det \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}}_{n}.$$

Beweisen Sie mit Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ stets $D_n = n + 1$ gilt.
(*Hinweis:* Entwickeln Sie die Determinante nach der ersten Spalte und ermitteln Sie eine rekursive Formel für D_n.)

Aufgabe 8.6 Finden Sie alle Nustellen des gegebenen Polynoms $f(x) \in K[x]$ für den gegebenen Körper K. Schreiben Sie $f(x) = (x - \alpha_1) \cdots (x - \alpha_k) g(x)$, wobei $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ die Nustellen von $f(x)$ sind, und $g(x)$ **keine** Nulstellen hat. (Die α_i sind nicht unbedingt verschieden.)

Beispiel: $K = \mathbb{R}$, $f(x) = x^5 - x^4 + x^3 - x^2$.
Die Nullstellen sind 0 (zweifach) und 1, und es gilt: $f(x) = x^2(x-1)(x^2+1)$.

a) $K = \mathbb{F}_2$, $f(x) = x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x + 1$.

b) $K = \mathbb{F}_2$, $f(x) = x^5 + x^3 + x + 1$.

c) $K = \mathbb{F}_2$, $f(x) = x^5 + x^4 + x^3 + x^2$.

d) $K = \mathbb{F}_3$, $f(x) = x^4 + x^2 + 1$.

e) $K = \mathbb{F}_3$, $f(x) = x^6 + 2x^5 + x^4 + 2x^3 + x^2 + 2x$.

f) $K = \mathbb{F}_3$, $f(x) = x^5 + x^4 + x^3 + x^2$.

g) $K = \mathbb{F}_5$, $f(x) = x^5 + x^4 + x^3 + x^2$.

h) $K = \mathbb{F}_5$, $f(x) = x^5 + 4x$.

i) $K = \mathbb{F}_7$, $f(x) = x^6 + 3x^5 + 6x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 6x + 2$.

j) $K = \mathbb{Q}$, $f(x) = 2x^5 + 3x^4 - 4x^3 - 7x^2 + 2$.

k) $K = \mathbb{R}$, $f(x) = 2x^5 + 3x^4 - 4x^3 - 7x^2 + 2$.

Aufgabe 8.7 Es sei K ein Körper.
Für ein Polynom $p(X) = a_k x^k + \ldots + a_1 x + a_0 \in K[x]$ und eine Matrix $A \in K^{n \times n}$ definieren wir eine Matrix $p(A) \in K^{n \times n}$ durch

$$p(A) = a_k A^k + \ldots + a_1 A + a_0 I_n.$$

Berechnen Sie $p(A)$ und $\det p(A)$ über $\mathbb{R}$ und über $\mathbb{F}_2$, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } p(X) = x^3 - x^2 + x + 1.$$

Aufgabe# 8.8 Es sei K ein Körper und es seien $a_0, \dots, a_{n-1} \in K$.
Zeigen Sie:

$$\det \begin{pmatrix} x & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ -1 & x & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & -1 & x & \cdots & 0 & a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & x & a_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & -1 & x + a_{n-1} \end{pmatrix} = x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

mittels

a) Laplace-Entwicklung (d.h. nach Definition),

b) elementarer Zeilenumformungen.