Hinweise zu den Beispielaufgaben zum Thema **Eigenwerte und Eigenräume. Diagonalisierbarkeit**

Aufgabe 9.1 Es sei
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{3\times 3}.$$

a) Welche der Zahlen $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$ sind Eigenwerte von A?

b) Sind die in a) gefundenen Eigenwerte alle Eigenwerte von A?

c) Finden Sie die Eigenräume zu den gefundenen Eigenwerten. Ist A diagonalisierbar?

Hinweise. a) Die Zahlen 0, 1 und 3 sind Eigenwerte von A, denn $\det(A) = \det(A-E) = \det(A-3E) = 0$.

b) Eine 3×3 Matrix kann höchstens 3 Eigenwerte haben, somit sind $0, 1, 3$ alle Eigenwerte.

c) Eigenraum zu EW 0: Löse das LGS mit Matrix A.
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 & -1 \\ 0 & \mathbf{1} & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
Die Lösung ist: $x_1 = x_2 = x_3$. Also $\mathrm{Eig}(A, 0) = \left\langle \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix} \right) \right\rangle$.
Eigenraum zu EW 1: Löse das LGS mit Matrix $A - E$.
$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 & 1 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
Die Lösung ist: $x_1 = -x_3$, $x_2 = 0$. Also $\mathrm{Eig}(A, 1) = \left\langle \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix} \right) \right\rangle$.
Eigenraum zu EW 3: Löse das LGS mit Matrix $A - 3E$.
$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 & -1 \\ 0 & \mathbf{1} & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
Die Lösung ist: $x_1 = x_3$, $x_2 = -2x_3$. Also $\mathrm{Eig}(A, 3) = \left\langle \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{smallmatrix} \right) \right\rangle$.
Die Vektoren $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix} \right), \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix} \right), \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{smallmatrix} \right)$ sind linear unabhängig, bilden also eine Basis von $\mathbb{Q}^3$. Daher ist A diagonalisierbar.

$\square$

Aufgabe 9.2 Geben Sie jeweils eine Matrix aus $\mathbb{R}^{2\times 2}$ an, die

a) zwei unterschiedliche reelle Eigenwerte hat,

b) nur einen reellen Eigenwert hat.

c) Zeigen Sie, dass die Matrix $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ keine reellen Eigenwerte hat.

Hinweise. a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ hat EW $1, 2$. b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ hat nur EW 1.
c) Angenommen, $a \in \mathbb{R}$ ist ein EW von $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, d.h. es existiert ein Vektor $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq 0$ mit

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax \\ ay \end{pmatrix} \Rightarrow a^2 = -1,$$

was für keinen $a \in \mathbb{R}$ möglich ist. □

Aufgabe 9.3 Es seien K ein Körper und $f \in K^n \to K^n$ eine lineare Abbildung mit $\sigma(f) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$. Zeigen Sie, dass $\operatorname{Eig}(f, \lambda_i) \cap \operatorname{Eig}(f, \lambda_j) = \{0\}$ für $i \neq j$.

Hinweise. Selbst! □

Aufgabe 9.4 Es seien K ein Körper und $A \in K^{n\times n}$.

a) Zeigen Sie: 0 ist genau dann ein Eigenwert von A, wenn $\det A = 0$.

b) Beweisen Sie für ein beliebiges $k \in \mathbb{N}$: Ist v ein Eigenvektor von A zum Eigenwert a, so ist a^k ein Eigenwert von A^k und v ist ein zu a^k zugehöriger Eigenvektor.

c#) Sei $A^3 = 0$. Zeigen Sie, dass 0 ein Eigenwert von A ist. Hat A noch weitere Eigenwerte ungleich Null? (*Hinweis:* Benutzen Sie, dass $\det(A^3) = (\det A)^3$ ist.)

Hinweise. a) Selbst!

b) Es sei v ein Eigenvektor von A zu Eigenwert a. D.h., es gilt: $Av = av$. Es folgt:

$$A^2 v = A(Av) = A(av) = a(Av) = a^2 v,$$

also ist v ein Eigenvektor von A^2 zu Eigenwert a^2.

Analog zeigen wir die Aussage mit Induktion. Angenommen, es gilt $A^{k-1}v = a^{k-1}v$. Dann gilt auch

$$A^k v = A(A^{k-1}v) = A(a^{k-1}v) = a^{k-1}(Av) = a^k v.$$

c) Wegen $A^3 = 0$ gilt $\det(A^3) = 0$. Andererseits gilt $\det(A^3) = (\det A)^3$, somit ist $\det A = 0$. Es folgt aus Teil a), dass 0 ein Eigenwert von A ist.

Wir bemerken ferner, dass die Nullmatrix 0 als einziger Eigenwert hat. (Es gilt $\det(0 - aI_n) = (-1)^n a^n = 0$ genau dann, wenn $a = 0$.) Angenommen, A hat einen weiteren Eigenwert $a \neq 0$. Es folgt aber aus Teil b), dass A^3 einen Eigenwert $a^3 \neq 0$ hat, ein **Widerspruch**. Somit hat A keine weiteren Eigenwerte außer 0.

□

Aufgabe 9.5 Es seien zwei lineare Abbildungen $\varphi, \theta : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gegeben mit

$$D_{S,S}(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -2 \\ \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad D_{S,S}(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

wobei S die Standardbasis von $\mathbb{R}^3$ bezeichnet.

a) Berechnen Sie das charakteristische Polynom, die Eigenwerte und die Eigenräume von φ und θ.

b) Zeigen Sie, dass φ diagonalisierbar ist. Finden Sie eine Basis T, sodass $D_{T,T}(\varphi)$ eine Diagonalmatrix ist.

Ist auch θ diagonalisierbar?

Hinweise. a) Zuerst bestimmen wir alles für φ.
Das charakteristische Polynom ist

$$\chi_\varphi(\lambda) = \det\big(\lambda E - D_{S,S}(\varphi)\big) = \begin{pmatrix} \lambda & -4 & 2 \\ -\frac{1}{2} & \lambda - 1 & +\frac{1}{2} \\ 1 & -2 & \lambda + 1 \end{pmatrix} = \lambda^3 - 4\lambda.$$

Die Eigenwerte von φ sind genau die Nullstellen von χ_φ.
Es gilt $\chi_\varphi(\lambda) = \lambda(\lambda - 2)(\lambda + 2)$, also sind 0 und ± 2 die EW.

Eigenraum zu EW 0: Löse das LGS mit Matrix $D_{S,S}(\varphi)$.

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 & -2 \\ \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Lösung ist: $x_1 = 0$, $2x_2 = x_3$, $\mathrm{Eig}(\varphi, 0) = \left\langle \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{smallmatrix} \right) \right\rangle$.

Eigenraum zu EW 2: Löse das LGS mit Matrix $D_{S,S}(\varphi) - 2I$.

$$\begin{pmatrix} -2 & 4 & -2 \\ \frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Lösung ist: $x_1 = 2x_2$, $x_3 = 0$, $\mathrm{Eig}(\varphi, 2) = \left\langle \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix} \right) \right\rangle$.

Eigenraum zu EW -2: Löse das LGS mit Matrix $D_{S,S}(\varphi) + 2I$.

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ \frac{1}{2} & 3 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Lösung ist: $x_1 = x_3$, $x_2 = 0$, $\mathrm{Eig}(\varphi, -2) = \left\langle \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix} \right) \right\rangle$.

Nun müssen wir das gleiche für θ machen.

$$\chi_\theta(a) = \det\big(\lambda E - D_{S,S}(\theta)\big) = \begin{pmatrix} \lambda - 1 & -2 & 0 \\ 2 & \lambda - 1 & -4 \\ -1 & -1 & \lambda + 1 \end{pmatrix} = \lambda^3 - \lambda^2 - \lambda + 1.$$

Eine Nullstelle von χ_θ ist 1 und es gilt $\chi_\theta(\lambda) = (\lambda-1)(\lambda^2-1) = (\lambda-1)^2(\lambda+1)$, also sind ± 1 die EW.

Eigenraum zu EW 1: Löse das LGS mit Matrix $D_{S,S}(\theta) - E$.

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Lösung ist: $x_1 = 2x_3$, $x_2 = 0$, $\mathrm{Eig}(\theta, 1) = \left\langle \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \right\rangle$.

Eigenraum zu EW -1: Löse das LGS mit Matrix $D_{S,S}(\theta) + E$.

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Lösung ist: $x_1 = x_3$, $x_2 = -x_3$, $\mathrm{Eig}(\theta, -1) = \left\langle \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \right\rangle$.

b) $T = \{t_1, t_2, t_3\} = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \right\}$ ist eine Basis von $\mathbb{R}^3$ aus Eigenvektoren von φ, daher ist φ diagonalisierbar. Ferner gilt:

$$D_{T,T}(\varphi) = [\gamma_T(\varphi(t_1)), \gamma_T(\varphi(t_2)), \gamma_T(\varphi(t_3))] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix},$$

denn $\varphi(t_1) = 0t_1$, $\varphi(t_2) = 2t_2$ und $\varphi(t_3) = -2t_3$.

θ hat nur zwei linear unabhängigen Eigenvektoren, und ist deswegen nicht diagonalisierbar.

□

Aufgabe 9.6 Es seien die folgenden Matrizen (über $\mathbb{Q}$) gegeben. Bestimmen Sie für jede Matrix das charakteristische Polynom, die Eigenwerte und Dimensionen der Eigenräume. Welche dieser Matrizen sind diagonalisierbar?

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Hinweise. a) Es gilt $\chi_A(x) = (x-2)\big((x-3)(x-1)+1\big) = (x-2)^3$.
$\sigma(A) = \{2\}$, $\dim \mathrm{Eig}(A, 2) = 2$, nicht diagonaliesierbar.

b) $\chi_B(x) = (x+1)^4$.
$\sigma(B) = \{-1\}$, $\dim \mathrm{Eig}(B, -1) = 2$, nicht diagonaliesierbar.

c) $h_C(x) = x^4$.
$\sigma(C) = \{0\}$, $\dim \mathrm{Eig}(C, 0) = 2$, nicht diagonaliesierbar.

□

Aufgabe 9.7 Es seien die folgenden Matrizen gegeben:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{3\times 3}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & -4 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}.$$

Bestimmen Sie für die beiden Matrizen das charakteristische Polynom, die Eigenwerte und die Eigenräume. Sind die Matrizen diagonalisierbar?

Hinweise. a) $\chi_A(x) = x(x+2)^2$, $\sigma(A) = \{0, -2\}$.

$\chi_B(x) = x^4$, $\sigma(B) = \{0\}$.

b) Eigenraum $\operatorname{Eig}(A, 0)$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Lösung ist $x_2 = 0$, $x_1 = 2x_3$, $\operatorname{Eig}(A, 0) = \left\langle \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \right\rangle$.

Eigenraum $\operatorname{Eig}(A, -2)$:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Lösung ist: $x_1 = 0$, $x_2 = 2x_3$, $\operatorname{Eig}(A, -2) = \left\langle \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \right\rangle$.

A ist nicht diagonalisierbar, da es nur zwei l.u. Eigenvektoren von A gibt.

Eigenraum $\operatorname{Eig}(B, 0)$:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & -4 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Die Lösung ist $x_1 = x_4$, $x_2 = x_3 - x_4$, $ER_B(0) = \left\langle \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \right\rangle$.

B ist nicht diagonalisierbar, da es nur zwei l.u. Eigenvektoren von B gibt.

□

Aufgabe 9.8 Bestimmen Sie für die folgenden Matrizen $A \in K^{n\times n}$, ob sie diagonalisierbar sind. Falls ja, geben sie eine Basis aus Eigenvektoren an.

Hinweise.

a) $K = \mathbb{F}_2$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. $\chi_A(x) = x^2(1+x)$.
$\operatorname{Eig}(A,0) = \left\langle \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \right\rangle$, $\operatorname{Eig}(A,1) = \left\langle \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \right\rangle$. Nicht diagonalisierbar.

b) $K = \mathbb{F}_3$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. $\chi_A(x) = x^3$.
Nicht diagonalisierbar, da keine Nullmatrix.

c) $K = \mathbb{F}_3$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. $\chi_A(x) = (x+2)^3$.
$\operatorname{Eig}(A,1) = \left\langle \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \right\rangle$. Nicht diagonalisierbar.

d) $K = \mathbb{F}_5$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. $\chi_A(x) = (x+1)^2(x+4)$.
$\operatorname{Eig}(A,1) = \left\langle \left(\begin{smallmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \right\rangle$, $\operatorname{Eig}(A,4) = \left\langle \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \right\rangle$. Nicht diagonalisierbar.

e) $K = \mathbb{F}_5$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. $\chi_A(x) = (x+1)(x+3)(x+4)$. Diagonalisierbar.
$\operatorname{Eig}(A,1) = \left\langle \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \right\rangle$, $\operatorname{Eig}(A,2) = \left\langle \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \right\rangle$, $\operatorname{Eig}(A,4) = \left\langle \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \right\rangle$.
$B = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \right\}$ ist die gesuchte Basis.

f) $K = \mathbb{F}_7$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 2 \\ 4 & 5 & 2 \\ 6 & 6 & 3 \end{pmatrix}$. $\chi_A(x) = x(x+1)(x+6)$. Diagonalisierbar.
$\operatorname{Eig}(A,1) = \left\langle \left(\begin{smallmatrix} 5 \\ 5 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \right\rangle$, $\operatorname{Eig}(A,1) = \left\langle \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \right\rangle$, $\operatorname{Eig}(A,6) = \left\langle \left(\begin{smallmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \right\rangle$.
$B = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} 5 \\ 5 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \right\}$ ist die gesuchte Basis.

g) $K = \mathbb{F}_{11}$, $A = \begin{pmatrix} 10 & 9 & 10 \\ 3 & 6 & 3 \\ 6 & 1 & 6 \end{pmatrix}$. $\chi_A(x) = x^3$.
Nicht diagonalisierbar, da keine Nullmatrix.

$\square$

Aufgabe# 9.9 Es seien zwei lineare Abbildungen $\phi, \psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gegeben mit

$$D_{S,S}(\phi) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 3 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}, \quad D_{S,S}(\psi) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -2 \end{pmatrix},$$

wobei S die Standardbasis von $\mathbb{R}^3$ ist.

a) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrizen $D_{S,S}(\phi \circ \psi)$ und $D_{S,S}(\psi \circ \phi)$.

b) Zeigen Sie, dass 1 und 2 bzw. 0 und -1 die Eigenwerte von ϕ bzw. ψ sind. Bestimmen Sie die zugehörigen Eigenräume $\operatorname{Eig}(\phi, 1)$ und $\operatorname{Eig}(\phi, 2)$ sowie $\operatorname{Eig}(\psi, 0)$ und $\operatorname{Eig}(\psi, -1)$.

c) Finden Sie eine Basis T, sodass beide Matrizen $D_{T,T}(\phi)$ und $D_{T,T}(\psi)$ Diagonalmatrizen sind.
(*Hinweis:* Berechnen Sie dafür den Schnitt der Eigenräume $\operatorname{Eig}(\phi, 1) \cap \operatorname{Eig}(\psi, -1)$.)

Hinweise. a) $D_{S,S}(\phi \circ \psi) = D_{S,S}(\psi \circ \phi) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -6 \\ 1 & 0 & -3 \\ \frac{5}{3} & \frac{4}{3} & -5 \end{pmatrix}$.

b) $\chi_\phi(x) = (x-1)^2(x-2)$, $\chi_\psi(x) = x(x+1)^2$.
Eigenraum $\operatorname{Eig}(\phi, 1)$:

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Lösung ist $x_1 = -x_2 + 3x_3$, $\operatorname{Eig}(\phi, 1) = \left\langle \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \right\rangle$.

Eigenraum $\operatorname{Eig}(\phi, 2)$:

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 3 \\ -1 & -2 & 3 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Lösung ist $x_1 = x_2 = x_3$, $\operatorname{Eig}(\phi, 2) = \left\langle \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \right\rangle$.

Eigenraum $\operatorname{Eig}(\psi, -1)$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Lösung ist $2x_1 = -x_2 + 3x_3$, $\operatorname{Eig}(\psi, -1) = \left\langle \left(\begin{smallmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} \frac{3}{2} \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \right\rangle$.

Eigenraum $\operatorname{Eig}(\psi, 0)$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Lösung ist $x_1 = 3x_3$, $x_2 = 0$. $\operatorname{Eig}(\psi, 0) = \left\langle \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \right\rangle$.

c) Für die Basis T müssen wir die beiden einzelnen Eigenvektoren $\left(\begin{smallmatrix}3\\0\\1\end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{Eig}(\psi, 0)$ (auch $\in \mathrm{Eig}(\phi, 1)$!) und $\left(\begin{smallmatrix}1\\1\\1\end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{Eig}(\phi, 2)$ (auch $\in \mathrm{Eig}(\psi, -1)$!). nehmen. Für die Basis brauchen wir noch einen Vektor, der gleichzeitig in $\mathrm{Eig}(\phi, 1)$ und $\mathrm{Eig}(\psi, -1)$ (d.h. im Schnitt) liegt. Man bemerkt (oder berechnet!), dass $\left(\begin{smallmatrix}0\\3\\1\end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{Eig}(\phi, 1) \cap \mathrm{Eig}(\psi, -1)$.

Daher ist $T = \left\{ \left(\begin{smallmatrix}3\\0\\1\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0\\3\\1\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}1\\1\\1\end{smallmatrix}\right) \right\}$ und

$$D_{T,T}(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad D_{T,T}(\psi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

$\square$