Beispielaufgaben zum Thema **Eigenwerte und Eigenräume. Diagonalisierbarkeit**

Aufgabe 9.1 Es sei
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{3\times 3}.$$

a) Welche der Zahlen 0, ±1, ±2, ±3 sind Eigenwerte von A?

b) Sind die in a) gefundenen Eigenwerte alle Eigenwerte von A?

c) Finden Sie die Eigenräume zu den gefundenen Eigenwerten. Ist A diagonalisierbar?

Aufgabe 9.2 Geben Sie jeweils eine Matrix aus $\mathbb{R}^{2\times 2}$ an, die

a) zwei unterschiedliche reelle Eigenwerte hat,

b) nur einen reellen Eigenwert hat.

c) Zeigen Sie, dass die Matrix $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ keine reellen Eigenwerte hat.

Aufgabe 9.3 Es seien K ein Körper und $f \in K^n \to K^n$ eine lineare Abbildung mit $\sigma(f) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$. Zeigen Sie, dass $\operatorname{Eig}(f, \lambda_i) \cap \operatorname{Eig}(f, \lambda_j) = \{0\}$ für $i \neq j$.

Aufgabe 9.4 Es seien K ein Körper und $A \in K^{n\times n}$.

a) Zeigen Sie: 0 ist genau dann ein Eigenwert von A, wenn $\det A = 0$.

b) Beweisen Sie für ein beliebiges $k \in \mathbb{N}$: Ist v ein Eigenvektor von A zum Eigenwert a, so ist a^k ein Eigenwert von A^k und v ist ein zu a^k zugehöriger Eigenvektor.

c#) Sei $A^3 = 0$. Zeigen Sie, dass 0 ein Eigenwert von A ist. Hat A noch weitere Eigenwerte ungleich Null? (*Hinweis:* Benutzen Sie, dass $\det(A^3) = (\det A)^3$ ist.)

Aufgabe 9.5 Es seien zwei lineare Abbildungen $\varphi, \theta : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gegeben mit
$$D_{S,S}(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -2 \\ \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad D_{S,S}(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$
wobei S die Standardbasis von $\mathbb{R}^3$ bezeichnet.

a) Berechnen Sie das charakteristische Polynom, die Eigenwerte und die Eigenräume von φ und θ.

b) Zeigen Sie, dass φ diagonalisierbar ist. Finden Sie eine Basis T, sodass $D_{T,T}(\varphi)$ eine Diagonalmatrix ist.

Ist auch θ diagonalisierbar?

Aufgabe 9.6 Es seien die folgenden Matrizen (über $\mathbb{Q}$) gegeben. Bestimmen Sie für jede Matrix das charakteristische Polynom, die Eigenwerte und Dimensionen der Eigenräume. Welche dieser Matrizen sind diagonalisierbar?
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 9.7 Es seien die folgenden Matrizen gegeben:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{3\times 3}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & -4 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}.$$

Bestimmen Sie für die beiden Matrizen das charakteristische Polynom, die Eigenwerte und die Eigenräume. Sind die Matrizen diagonalisierbar?

Aufgabe 9.8 Bestimmen Sie für die folgenden Matrizen $A \in K^{n\times n}$, ob sie diagonalisierbar sind. Falls ja, geben sie eine Basis aus Eigenvektoren an.

a) $K = \mathbb{F}_2$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

b) $K = \mathbb{F}_3$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

c) $K = \mathbb{F}_3$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

d) $K = \mathbb{F}_5$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

e) $K = \mathbb{F}_5$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

f) $K = \mathbb{F}_7$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 2 \\ 4 & 5 & 2 \\ 6 & 6 & 3 \end{pmatrix}$.

g) $K = \mathbb{F}_{11}$, $A = \begin{pmatrix} 10 & 9 & 10 \\ 3 & 6 & 3 \\ 6 & 1 & 6 \end{pmatrix}$.

Aufgabe# 9.9 Es seien zwei lineare Abbildungen $\phi, \psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gegeben mit

$$D_{S,S}(\phi) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 3 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}, \quad D_{S,S}(\psi) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -2 \end{pmatrix},$$

wobei S die Standardbasis von $\mathbb{R}^3$ ist.

a) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrizen $D_{S,S}(\phi \circ \psi)$ und $D_{S,S}(\psi \circ \phi)$.

b) Zeigen Sie, dass 1 und 2 bzw. 0 und -1 die Eigenwerte von ϕ bzw. ψ sind. Bestimmen Sie die zugehörigen Eigenräume $\mathrm{Eig}(\phi, 1)$ und $\mathrm{Eig}(\phi, 2)$ sowie $\mathrm{Eig}(\psi, 0)$ und $\mathrm{Eig}(\psi, -1)$.

c) Finden Sie eine Basis T, sodass beide Matrizen $D_{T,T}(\phi)$ und $D_{T,T}(\psi)$ Diagonalmatrizen sind.
(*Hinweis:* Berechnen Sie dafür den Schnitt der Eigenräume $\mathrm{Eig}(\phi, 1) \cap \mathrm{Eig}(\psi, -1)$.)