

Antworten zu den Beispielaufgaben zum Thema **Grenzwert**

Aufgabe 2.1 Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

a) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x - a}{\sqrt{x} - \sqrt{a}} = 2\sqrt{a}, a > 0.$

b) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x+11} - 2\sqrt{x-1}}{x^2 - 25} = -\frac{3}{80}.$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[5]{32+x} - 2}{x} = \frac{1}{80}.$ (*Hinweis:* Substitution $y = \sqrt[5]{32+x}$.)

Aufgabe 2.2 Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte, indem Sie $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ benutzen:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 3x - \cos 7x}{x^2} = 20.$

b) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \cot 2x \cdot \cot\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 2.$

Aufgabe 2.3 Beweisen Sie für $a > 0, a \neq 1$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a,$$

indem Sie $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ benutzen.

Aufgabe 2.4 Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^7 + 5x^6 + 4x^3}{x^7 + 2x^3} = 2.$

b) $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{2x^2 - 11x - 21}{x^2 - 9x + 14} = \frac{17}{5}.$

c) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{3}{1-x^3} + \frac{1}{x-1} \right) = 1.$

d) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x^2 - 4x + 6}{x^2 - 5x + 4} + \frac{x-4}{3x^2 - 9x + 6} \right) = 1.$

e) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+5)^5 + (x+6)^5 + (x+7)^5}{x^5 + 5^5} = 3.$

f) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(1+x^{11}+7x^{13})^3}{(1+x^4)^{10}} = 0.$

g) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3 + 3x^2}{x^2 + 1} - x \right) = 3.$

Aufgabe 2.5 Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

a) $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{\sqrt{x-2} - 2}{x-6} = \frac{1}{4}$.

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + 14x}{2x + \sqrt[3]{x^2}} = 7$.

c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^2 - 1} - \sqrt{x^2 + 1} \right) = 0$.

d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{4x^4 + 13x^2 - 7} - 2x^2 \right) = \frac{13}{4}$.

e) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^2 + \sqrt{x^2 + \sqrt{x^2}}} - \sqrt{x^2} \right) = \frac{1}{2}$.

Aufgabe 2.6 Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 4x}{\sin x} = 4$.

b) $\lim_{x \rightarrow 0} x \cot 5x = \frac{1}{5}$.

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2}{\sin 2x \sin x} - \frac{1}{\sin x^2} \right) = \frac{1}{2}$.

d) $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{\pi}{x} = \pi$.