Antworten zu den Beispielaufgaben zum Thema **Taylor-Entwicklung**

Aufgabe 3.1 Es seien $\cosh x = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$, $\sinh x = \frac{e^x-e^{-x}}{2}$. Bestimmen Sie die Taylor-Entwicklung von $\cosh x$ und $\sinh x$ im Punkt 0

a) nach Definition, d.h. durch berechnen der Ableitungen;

b) unter Benutzung der Taylor-Entwicklung von e^x und Rechenregeln.

$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n}),$$
$$\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1}).$$

Aufgabe 3.2 Bestimmen Sie die Taylor-Entwicklung von $\sin(2x + \frac{\pi}{4})$ im Punkt 0 nach Definition.

$$\sin(2x + \tfrac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \sum_{k=1}^{n} \frac{2^k}{k!} \sin\left[(2k+1)\frac{\pi}{4}\right] x^k + o(x^{2n+1}).$$

Aufgabe 3.3 Unter Benutzung von bekannten Entwicklungen von e^x, $\frac{1}{1+x}$, $\ln(1+x)$ berechnen Sie die Taylor-Entwicklungen folgender Funktionen im Punkt 0:

a) $e^{\frac{x}{2}+2} = e^2 + \sum_{k=1}^{n} \frac{e^2}{2^k k!} x^k + o(x^n),$

b) $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + o(x^n) = 1 + \sum_{k=1}^{n} x^k + o(x^n),$

c) $\frac{1}{1+x^2} = 1 + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k x^{2k} + o(x^{2n}),$

d) $\frac{1}{2x+3} = \frac{1}{3} + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \frac{2^k}{3^{k+1}} x^k + o(x^n),$

e) $\ln(1-x) = -\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} + o(x^n),$

f) $\ln(5-4x) = \ln 5 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \left(\frac{4}{5}\right)^k x^k + o(x^n).$

Aufgabe 3.4 Berechnen Sie die Taylor-Entwicklungen folgender Funktionen im Punkt 0:

a) $(x+5)e^{2x} = 5 + \sum_{k=1}^{n} \frac{2^{k-1}}{k!}(k+10)x^k + o(x^n)$,

b) $\ln\left(\frac{1+2x}{1-x}\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}2^k+1}{k} x^k + o(x^n)$.

Aufgabe 3.5 Bestimmen Sie die Taylor-Entwicklungen folgender Funktionen im Punkt 0 mit $o(x^n)$:

a) $e^x \ln(1+x)$, $n=4$,

$$e^x \ln(1+x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^4),$$

b) $(1-x+x^2)^3$, $n=2$,

$$(1-x+x^2)^3 = 1 - 3x + 6x^2 + o(x^2),$$

c) $(1-2x+3x^2+4x^3)^3$, $n=5$,

$$(1-2x+3x^2+4x^3)^3 = 1 - 6x + 21x^2 - 32x^3 + 15x^4 + 66x^5 + o(x^5),$$

d) $\frac{1-x+x^2}{1+x+x^2}$, $n=3$,

$$\frac{1-x+x^2}{1+x+x^2} = 1 - 2x + 2x^2 + o(x^3),$$

e) $\ln^3\left(1-\frac{x}{2}\right)$, $n=3$,

$$\ln^3\left(1-\tfrac{x}{2}\right) = -\frac{1}{8}x^3 + o(x^3).$$