

Antworten zu den Beispielaufgaben zum Thema **Taylor-Entwicklung II, Grenzwert II**

Aufgabe 4.1 Bestimmen Sie die Taylor-Entwicklungen folgender Funktionen im Punkt 0 mit $o(x^n)$:

a) $\ln \cos x$, $n = 2$,

$$\ln \cos x = -\frac{x^2}{2} + o(x^2),$$

b) $\arctan(\sin x)$, $n = 3$,

$$\arctan(\sin x) = x - \frac{x^3}{2} + o(x^3),$$

c) $e^{\sin x}$, $n = 3$,

$$e^{\sin x} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^3),$$

d) $e^{x \sin x}$, $n = 4$,

$$e^{\sin x} = 1 + x^2 + \frac{x^4}{3} + o(x^4),$$

e) $\frac{1}{1 - \ln^2(1+x)}$, $n = 5$,

$$\frac{1}{1 - \ln^2(1+x)} = 1 + x^2 - x^3 + \frac{23}{12}x^4 - \frac{17}{6}x^5 + o(x^5).$$

Aufgabe 4.2 Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 + 4x - 7}{2x^2 + 3x - 5} = \frac{10}{7}$.

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x}{\ln \cos 3x} = \frac{1}{9}$.

c) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\ln(x^2 - 8)}{2x^2 - 5x - 3} = \frac{6}{7}$.

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos ax}{x^2} = -\frac{a^2}{2}$.

e) $\lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{\arctan(x-1)}{\sqrt{x^2+x-2}} = 0$.

f) $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x \cdot \ln \cot x = 0$.

g) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot \ln \left(\frac{2}{\pi} \arctan x \right) = -\frac{2}{\pi}$.

Aufgabe 4.3 Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

a) $\lim_{x \rightarrow 1-0} \ln x \cdot \ln(1-x) = 0.$

b) $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln x \cdot \ln(1+x)}{\sqrt{x}} = 0.$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 3x + x^3 \cos\left(\frac{\pi}{x}\right)}{x^2} = 4.$

Aufgabe 4.4 Berechnen Sie

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - (\cot x)^2 \right),$$

indem Sie $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$ benutzen. (Antwort: $\frac{2}{3}$.)