

Antworten zu den Beispielaufgaben zum Thema **Integral**

Aufgabe 5.1 Berechnen Sie die folgenden Integrale:

a) $\int x(x+1)(x-2)dx = \frac{x^4}{3} - \frac{x^3}{3} - x^2 + C,$

b) $\int \frac{x^2 - x + 1}{\sqrt{x}} dx = \frac{2}{5}x^2\sqrt{x} - \frac{2}{3}x\sqrt{x} + 2\sqrt{x} + C,$

c) $\int \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}} dx = \frac{8}{15}x^{\frac{8}{5}} + C,$

d) $\int \frac{1}{3x^2 - 5} dx = \frac{1}{2\sqrt{15}} \ln \left| \frac{x\sqrt{3} - \sqrt{5}}{x\sqrt{3} + \sqrt{5}} \right| + C,$

e) $\int \frac{2^x + 5^x}{10^x} dx = -\frac{1}{5^x \ln 5} - \frac{1}{2^x \ln 2} + C,$

f) $\int \sin^2 \frac{x}{2} dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin x}{2} + C, \text{ (Hinweis: Benutzen Sie } \sin^2 \frac{x}{2} = \frac{\cos x - 1}{2} \text{.)}$

g) $\int \cot^2 x dx = -\cot x - x + C,$

Aufgabe 5.2 Berechnen Sie die folgenden Integrale:

a) $\int \frac{6x - 7}{3x^2 - 7x + 1} dx = \ln |3x^2 - 7x + 1| + C,$

b) $\int \frac{x}{(1-x^2)^2} dx = \frac{1}{2(1-x^2)} + C,$

c) $\int x^2 \sqrt{x^3 + 1} dx = \frac{2}{9} \sqrt{(x^3 + 1)^3} + C,$

d) $\int x e^{-x^2} dx = -\frac{1}{2} e^{-x^2} + C,$

e) $\int \frac{\ln^2 x}{x} dx = \frac{1}{3} \ln^3 x + C,$

f) $\int \frac{dx}{x \cdot \ln x \cdot \ln(\ln x)} = \ln |\ln(\ln x)| + C,$

g) $\int \frac{1}{x^2} \cos \frac{1}{x} dx = -\sin \frac{1}{x} + C,$

h) $\int \frac{e^{\tan x} + \cot x}{\cos^2 x} dx = e^{\tan x} + \ln |\tan x| + C,$

Aufgabe 5.3 Berechnen Sie die folgenden Integrale:

- a) $\int x \ln x dx = \frac{x^2}{4}(2 \ln x - 1) + C,$
- b) $\int x e^{-x} dx = -e^{-x}(x + 1) + C,$
- c) $\int x \cos(5x - 7) dx = \frac{x}{5} \sin(5x - 7) + \frac{1}{25} \cos(5x - 7) + C,$
- d) $\int \frac{x}{\cos^2 x} dx = x \tan x + \ln |\cos x| + C,$
- e) $\int \arctan x dx = x \arctan x - \frac{1}{x^2} \ln(1 + x^2) + C,$
- f) $\int \arctan \sqrt{x} dx = (1 + x) \arctan \sqrt{x} - \sqrt{x} + C,$
- g) $\int x^2 \sin 2x dx = \left(\frac{1}{4} - \frac{x^2}{2}\right) \cos 2x + \frac{x}{2} \sin 2x + C.$

Aufgabe 5.4 Berechnen Sie die folgenden bestimmten Integrale:

- a) $\int_{-1}^1 \sqrt[3]{x} dx = 0,$
- b) $\int_1^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \frac{3}{2}(2\sqrt[3]{2} - 1),$
- c) $\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1 + x^2} = \frac{\pi}{6},$
- d) $\int_e^{e^2} \frac{dx}{x \ln x} = \ln 2,$
- e) $\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 x dx = \pi,$
- f) $\int_1^2 \frac{e^{\frac{1}{x^2}}}{x^3} dx = \frac{1}{2}(e - e^{\frac{1}{4}}),$
- g) $\int_1^e \frac{\cos(\ln x)}{x} dx = \sin 1,$
- h) $\int_1^e \frac{dx}{x(1 + \ln^2 x)} = \frac{\pi}{4},$
- i) $\int_0^{\pi} x^3 \sin x dx = \pi^3 - 6\pi.$