

Antworten zu den Beispielaufgaben zum Thema **Optimierung in 2D und 3D**

Aufgabe 7.1 Untersuchen Sie die Funktion $u(x, y, z)$ auf lokale Extrema:

a) $u(x, y, z) = x^2 + y^2 + (z + 1)^2 - xy + x.$

$$\left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -1\right) \text{ lokales Minimum, } u\left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -1\right) = -\frac{1}{3}.$$

b) $u(x, y, z) = 8 - 6x + 4y - 2z - x^2 - y^2 - z^2.$

$$(-3, 2, -1) \text{ lokales Maximum, } u(-3, 2, -1) = 22.$$

c) $u(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2 - 4x + 6y - 2z.$

keine Extrema.

d) $u(x, y, z) = (x + 7z)e^{-(x^2+y^2+z^2)}.$

$$\left(\frac{1}{10}, 0, \frac{7}{10}\right) \text{ lokales Maximum, } u\left(\frac{1}{10}, 0, \frac{7}{10}\right) = \frac{5}{\sqrt{e}},$$

$$\left(-\frac{1}{10}, 0, -\frac{7}{10}\right) \text{ lokales Minimum, } u\left(-\frac{1}{10}, 0, -\frac{7}{10}\right) = -\frac{5}{\sqrt{e}}$$

e) $u(x, y, z) = 2 \ln x + 3 \ln y + 5 \ln z + \ln(22 - x - y - z).$

$$(4, 6, 10) \text{ lokales Maximum, } u(4, 6, 10) = 13 \ln 2 + 3 \ln 3 + 5 \ln 5.$$

Aufgabe 7.2 Untersuchen Sie die Funktion $u(x, y)$ auf lokale Extrema unter der gegebenen Nebenbedingung:

a) $u(x, y) = xy, x + y - 1 = 0.$

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \text{ lokales Maximum, } u\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}.$$

b) $u(x, y) = x^2 + y^2, 3x + 2y - 6 = 0.$

$$\left(\frac{18}{13}, \frac{12}{13}\right) \text{ lokales Minimum, } u\left(\frac{18}{13}, \frac{12}{13}\right) = \frac{36}{13}.$$

c) $u(x, y) = xy^2, x + 2y - 1 = 0.$

$$(1, 0) \text{ lokales Minimum, } u(1, 0) = 0,$$

$$\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) \text{ lokales Maximum, } u\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{27}$$

Aufgabe 7.3 Untersuchen Sie die Funktion $u(x, y, z)$ auf lokale Extrema unter den gegebenen Nebenbedingungen:

a) $u(x, y, z) = xyz$, $x + y - z = 3$, $x - y - z = 8$.

$$\left(\frac{11}{4}, -\frac{5}{2}, -\frac{11}{4}\right) \text{ lokales Maximum, } u\left(\frac{11}{4}, -\frac{5}{2}, -\frac{11}{4}\right) = \frac{605}{32}.$$

b) $u(x, y, z) = 2x^2 + 3y^2 + 4z^2$, $x + y + z = 13$.

$$(6, 4, 3) \text{ lokales Maximum, } u(6, 4, 3) = 156.$$

c) $u(x, y, z) = x^2y^3z^3$, $2x + 3y + 4z = 18$, $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$.

$$(2, 2, 2) \text{ lokales Maximum, } u(2, 2, 2) = 512.$$

d) $u(x, y, z) = \sin x \sin y \sin z$, $x + y + z = \frac{\pi}{2}$, $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$.

$$\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right) \text{ lokales Maximum, } u\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{8}.$$

Aufgabe 7.5 Untersuchen Sie die Funktion $f(x, y) = \ln xy$ auf lokale Extrema unter der Nebenbedingung $\varphi(x, y) = x^3 + xy + y^3 = 0$:

$$\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) \text{ lokales Maximum, } f\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) = -2 \ln 2.$$

Aufgabe 7.6 Untersuchen Sie die Funktion $f(x, y, z) = x - 2y - 2z$ unter der Nebenbedingung $\varphi(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 9 = 0$.

$$(-1, 2, -2) \text{ lokales Minimum, } u(-1, 2, -2) = -9,$$

$$(1, -2, 2) \text{ lokales Maximum, } u(1, -2, 2) = 9.$$