Beispielaufgaben zum Thema **Optimierung in 2D und 3D**

Aufgabe 7.1 Untersuchen Sie die Funktion $u(x,y,z)$ auf lokale Extrema:

a) $u(x,y,z) = x^2 + y^2 + (z+1)^2 - xy + x$,

b) $u(x,y,z) = 8 - 6x + 4y - 2z - x^2 - y^2 - z^2$,

c) $u(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2 - 4x + 6y - 2z$,

d) $u(x,y,z) = (x+7z)e^{-(x^2+y^2+z^2)}$,

e) $u(x,y,z) = 2\ln x + 3\ln y + 5\ln z + \ln(22 - x - y - z)$,

Aufgabe 7.2 Untersuchen Sie die Funktion $u(x,y)$ auf lokale Extrema unter der gegebenen Nebenedingung:

a) $u(x,y) = xy$, $x + y - 1 = 0$.

b) $u(x,y) = x^2 + y^2$, $3x + 2y - 6 = 0$.

c) $u(x,y) = xy^2$, $x + 2y - 1 = 0$.

Aufgabe 7.3 Untersuchen Sie die Funktion $u(x,y,z)$ auf lokale Extrema unter den gegebenen Nebenbedingungen:

a) $u(x,y,z) = xyz$, $x + y - z = 3$, $x - y - z = 8$.

b) $u(x,y,z) = 2x^2 + 3y^2 + 4z^2$, $x + y + z = 13$.

c) $u(x,y,z) = x^2y^3z^3$, $2x + 3y + 4z = 18$, $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$.

d) $u(x,y,z) = \sin x \sin y \sin z$, $x + y + z = \frac{\pi}{2}$, $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$.

Aufgabe 7.4 Untersuchen Sie die Funktion $f(x,y) = 1 - 4x - 8y$ auf lokale Extrema unter der Nebenbedingung $\varphi(x,y) = x^2 - 8y^2 - 8 = 0$.

Lösung. Setze $L(x,y) = 1 - 4x - 8y + \lambda(x^2 - 8y^2 - 8)$ und löse das Gleichungssystem

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = -4 + 2\lambda x = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial y} = -8 - 16\lambda y = 0, \\ x^2 - 8y^2 = 8 \end{cases}$$

Es gibt zwei Lösungen $(x,y;\lambda) = (4,-1;\frac{1}{2})$ und $(x,y;\lambda) = (-4,1;-\frac{1}{2})$.
Ferner gilt $d^2L = 2\lambda dx^2 - 16\lambda dy^2$.

1) $(x,y;\lambda) = (4,-1;\frac{1}{2})$.
Die Gleichung $d\varphi = 2xdx - 16ydy = 8dx + 16dy = 0$ liefert $dy = \frac{1}{2}dx$.
Einsetzen in d^2L liefert nun

$$d^2L = 2\frac{1}{2}dx^2 - 16\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}dx\right)^2 = 2dx^2 \geq 0.$$

Also ist $(4,-1)$ ein Minimum und $u(4,-1) = -7$.

2) $(x, y; \lambda) = (-4, 1; -\frac{1}{2})$.
Die Gleichung $d\varphi = -8dx - 16dy = 0$ liefert $dy = \frac{1}{2}dx$.
Einsetzen in d^2L liefert nun

$$d^2L = -2\frac{1}{2}dx^2 + 16\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}dx\right)^2 = -2dx^2 \leq 0.$$

Also ist $(-4, 1)$ ein Maximum und $u(-4, 1) = 9$.

$\square$

Aufgabe 7.5 Untersuchen Sie die Funktion $f(x, y) = \ln xy$ auf lokale Extrema unter der Nebenbedingung $\varphi(x, y) = x^3 + xy + y^3 = 0$.

Aufgabe 7.6 Untersuchen Sie die Funktion $f(x, y, z) = x - 2y - 2z$ unter der Nebenbedingung $\varphi(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 9 = 0$.