Antworten zu den Beispielaufgaben zum Thema **Vektoranalysis**

Aufgabe 8.1 Zeichnen Sie für das Skalarfeld $u(x, y)$ die Niveaukurven:

a) $u(x, y) = x + y$,
$$y = -x + C.$$

b) $u(x, y) = \dfrac{y}{x^2}$, $x \neq 0$,
$$y = 0 \text{ und } y = Cx^2 \text{ für } C \neq 0.$$

c) $u(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$, $(x, y) \neq (0, 0)$,
$$x^2 + y^2 = e^C.$$

d) $u(x, y) = \arccos \sqrt{x^2 + y^2}$, $x^2 + y^2 \leq 1$,
$$\sqrt{x^2 + y^2} = \cos C.$$

Aufgabe 8.2 Berechnen Sie $\operatorname{div} f$ und $\operatorname{rot} f$ für das Vektorfeld f:

a) $f(x, y, z) = (xy + z^2, yz + x^2, zx + y^2)$,
$$\operatorname{div} f = x + y + z, \quad \operatorname{rot} f = (y, z, x).$$

b) $f(x, y, z) = (x - 3z, x + 2y + z, 4x + y)$,
$$\operatorname{div} f = 3, \quad \operatorname{rot} f = (0, -7, 1).$$

c) $f(x, y, z) = (xy^2, x^2y, z^3)$,
$$\operatorname{div} f = x^2 + y^2 + 3z^2, \quad \operatorname{rot} f = (0, 0, 0).$$

d) $f(x, y, z) = (xyz, x + y + z, x^2 + y^2 + z^2)$,
$$\operatorname{div} f = 1 + 2z + yz, \quad \operatorname{rot} f = (2y - 1, xy - 2x, 1 - xz).$$

e) $f(x, y, z) = \operatorname{grad} \ln(x^2 + y^2 + z^2)$,
$$\operatorname{div} f = \frac{2}{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \operatorname{rot} f = (0, 0, 0).$$

f) $f(x, y, z) = \operatorname{grad} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$,
$$\operatorname{div} f = \frac{2}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad \operatorname{rot} f = (0, 0, 0).$$

Aufgabe 8.3 Es seien $u = u(x, y, z)$ ein Skalarfeld und $f = \big(f_1, f_2, f_3\big)$ mit $f_1 = f_1(x, y, z)$, $f_2 = f_2(x, y, z)$, $f_3 = f_3(x, y, z)$ ein Vektorfeld. Beweisen Sie:

a) $\operatorname{rot}\operatorname{grad} u = (0, 0, 0)$,

b) $\operatorname{div}\operatorname{rot} f = 0$,

c) $\operatorname{rot}\operatorname{rot} f = \operatorname{grad}\operatorname{div} f - \Delta f$, wobei $\Delta f = (\Delta f_1, \Delta f_2, \Delta f_3)$.

Aufgabe 8.4 Entscheiden Sie, ob die folgenden Vektorfelder f quellfrei bzw. konservativ sind. Für konservative f berechnen Sie das Potential u mit $f = \operatorname{grad} u$.

a) $f(x, y) = (y^2, xy)$,

nicht quellfrei, nicht konservativ.

b) $f(x, y) = (2x, 2y)$,

nicht quellfrei, konservativ, $u = x^2 + y^2 + C$.

c) $f(x, y, z) = (2xy + z, x^2 - 2y, x)$,

nicht quellfrei, konservativ, $u = x^2y - y^2 + xz + C$.

d) $f(x, y, z) = \left(yz - xy, xz - \dfrac{x^2}{2} + yz^2, xy + y^2z\right)$,

nicht quellfrei, konservativ, $u = xyz - \frac{x^2y}{2} + \frac{y^2z^2}{2} + C$.

e) $f(x, y, z) = (y, z, x)$,

quellfrei, nicht konservativ.

f) $f(x, y, z) = \left(\dfrac{2x}{x^2 + y^2 + z^2}, \dfrac{2y}{x^2 + y^2 + z^2}, \dfrac{2z}{x^2 + y^2 + z^2}\right)$,

nicht quellfrei, konservativ, $u = \ln(x^2 + y^2 + z^2) + C$.

g) $f(x, y, z) = \operatorname{grad} \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$,

quellfrei, konservativ, $u = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + C$.