

**Aufgabe 11.1** In dieser Aufgabe ist  $\ln x := \log_e x$ .

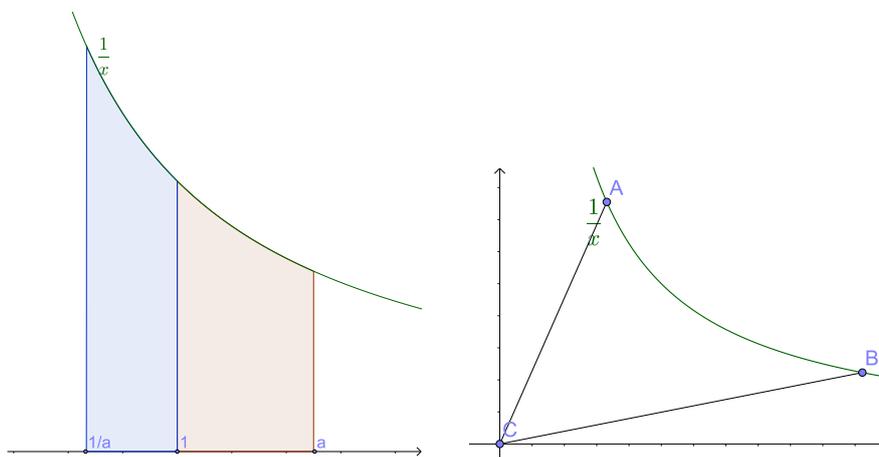
- a) Zeigen Sie:  $\log_a b = \log_{a^n}(b^n)$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ .
- b) Vereinfachen Sie soweit wie möglich:
  - i)  $\frac{3^{(3^3)}}{(3^3)^3}$ ,    ii)  $\log_2 10 \cdot \log_{10} 2$ ,    iii)  $\log_3 \frac{5}{4} + \log_9 \frac{24}{5} - \log_9 \frac{5}{6}$ ,    iv)  $\frac{\ln(10^{\ln(e^2)})}{\ln 5 + \ln 2}$ .
- c) Lösen Sie die folgenden Gleichungen:
  - i)  $4^x = 0,125$ ,    ii)  $3 \ln x = \ln 56 - \ln 7$ ,
  - iii)  $\log_2(10x) = 1 + \log_2 5$ ,    iv)  $\ln x = 2 \ln 5 + 3 \ln 2$ .

**Aufgabe 11.2** Es bezeichne  $\ln x$  die Fläche zwischen der Hyperbel  $y = \frac{1}{x}$  und der  $x$ -Achse im Intervall  $[1, x]$  ( $x \geq 1$ ).

- a) Nähern Sie  $\ln 10$  durch die Fläche von 3 gleich breiten Trapezen an.
- b) Zeigen Sie, dass  $\ln 10 \approx \frac{10}{3} \ln 2 - \frac{1}{125}$ . (*Hinweis:* Schreiben Sie  $\ln(\frac{2^{10}}{10^3})$  auf zwei verschiedene Arten und benutzen Sie die Näherung  $\ln(1+x) \approx x$  für kleine  $x$ .)
- c) Nähern Sie nun  $\ln 2$  durch die Fläche von 3 gleich breiten Trapezen an.
- d) Setzen Sie Ihre Näherung von  $\ln 2$  aus c) in die Formel aus b) ein.
- e) Berechnen sie den Wert von  $\ln 10$  mit einem Taschenrechner. Welche der beiden Näherungen von  $\ln 10$  aus a) und aus d) ist besser?

**Aufgabe 11.3**

- a) Zeigen Sie, dass die Flächen unter dem Graphen der Funktion  $y = \frac{1}{x}$  von 1 bis  $a$  und von  $\frac{1}{a}$  bis 1 übereinstimmen für alle  $a \in \mathbb{R}$ ,  $a > 0$ .
- b) Wir wählen zwei Punkte  $A = (a, \frac{1}{a})$  und  $B = (b, \frac{1}{b})$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$  und  $0 < a < b$  auf dem Graphen der Funktion  $y = \frac{1}{x}$ . Berechnen Sie den Inhalt der Fläche die von den Geraden von  $C = (0,0)$  nach  $A$  bzw. nach  $B$  und dem Graphen der Funktion eingeschlossen wird. Drücken Sie Ihr Antwort mit  $\ln$  aus; unterscheiden Sie dabei drei Fälle:  $1 < a < b$ ,  $a < 1 < b$  und  $a < b < 1$ .

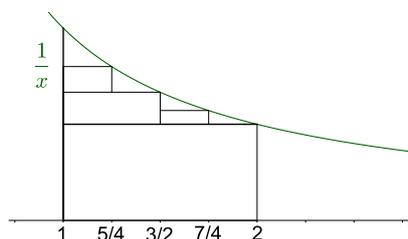


**Aufgabe 11.4** Wir definieren die Funktionen

$$\cosh x := \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \sinh x := \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \tanh x := \frac{\sinh x}{\cosh x}.$$

- a) Beweisen Sie die folgenden Identitäten:
- $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$  sowie  $\tanh^2 x + \frac{1}{\cosh^2 x} = 1$ ,
  - $\sinh(x + y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$ .
- b) Zeigen Sie, dass die Funktionen  $\ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$  bzw.  $\frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$  invers zur Funktionen  $\sinh x$  bzw.  $\tanh x$  sind.

**Aufgabe# 11.5** Betrachten Sie das folgende Bild.



- a) Berechnen Sie den Flächeninhalt der 4 Rechtecke aus den Bild.
- b) Wie könnte man das Verfahren fortsetzen um den Flächeninhalt der von dem Graphen der Funktion  $y = \frac{1}{x}$  und der  $x$ -Achse zwischen 1 und 2 eingeschlossen wird, in (unendlich viele) Rechtecke aufzuteilen?
- c) Stellen Sie eine Vermutung auf, was der Flächeninhalt der weiteren Rechtecke sein wird (ohne Beweis), und folgern Sie daraus die folgende Formel:

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}.$$

(Hinweis:  $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}$ .)

**Aufgabe# 11.6** Berechnen bzw. vereinfachen Sie:

- a) i)  $2^{(3^5)}$ ,    ii)  $2^{1+x} \cdot 3^x$ ,    iii)  $\sqrt{9^{x-1}}$ ,    iv)  $\sqrt[5]{10^{20x+10}}$ ,    v)  $2^x \cdot 4^{1-x} \cdot 8^x$ .
- b) i)  $\log_3 \frac{2}{9} - \log_3 \frac{8}{27}$ ,    ii)  $\log_{\frac{1}{2}} 5 + \log_2 5$     iii)  $\frac{\log_5 8}{\log_5 4}$ ,
- iv)  $\log_5 8 \cdot \log_5 4$ ,    v)  $\log_{10} 64 - \log_{10} \frac{1}{2}$ ,    vi)  $\log_2 5 + \log_2 3$ .

Aufgaben mit # werden **nicht** korrigiert und müssen **nicht** abgegeben werden.