Elementarmathematik – SS 2017 **Blatt 12**

Dr. Anton Malevich

Aufgabe 12.1 Berechnen Sie mit Hilfe der aus der Rechenregeln die Ableitungen der folgenden Funktionen. (Dabei können Sie die Ableitungen von $\sin x$, $\cos x$, $\ln x$, e^x und x^r, $r \in \mathbb{R}$, als bekannt annehmen.)

a) $f(x) = (4x^2 - x)(x^2 - 1)$, b) $f(x) = 7\sin x + \cos x$, c) $f(a) = \tan a$,

d) $g(x) = \ln(\cos x)$, e) $h(\phi) = \sin(\phi)\cos(\phi)$, f) $x(t) = s\sqrt[4]{t}$,

g) $f(x) = x^{\cos x}$, h) $f(x) = e^{x^2}$, i) $f(t) = \frac{6t^4+2t^2-7t}{2t^3}$.

Aufgabe 12.2 Berechnen Sie die folgenden Integrale:

a) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \left(a^3 + \frac{a^2}{2} - xa + 2\right) da$, b) $\displaystyle\int_e^{e^2} \frac{dx}{x \ln x}$, c) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 t \, dt$,

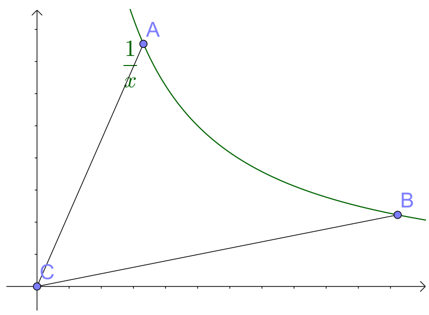
d) $\displaystyle\int_1^2 \frac{e^{\frac{1}{x^2}}}{x^3} \, dx$, e) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)\cos(x) \, dx$, f) $\displaystyle\int_0^{\pi} x^3 \sin x \, dx$.

Aufgabe 12.3 Bestimmen Sie die folgenden Flächen durch integrieren:

a) Fläche zwischen dem Graphen von $y = e^x$, der y-Achse und der Geraden $y = e$.

b) Fläche zwischen den Graphen von $y = \sqrt{x}$ und $y = x^3$.

c) Fläche zwischen den Strecken AC, CB und der Hyperbel $y = \frac{1}{x}$, wobei $C = (0, 0)$, $A = \left(a, \frac{1}{a}\right)$ und $B = \left(b, \frac{1}{b}\right)$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ und $0 < a < b$. (*Hinweis:* Schreiben Sie zuerst die Gleichungen der Geraden durch A und C bzw. durch B und C.)



Aufgabe 12.4 (Siehe Aufgabe 11.4.) Wir definieren die Funktionen

$$\cosh x := \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \qquad \sinh x := \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \qquad \tanh x := \frac{\sinh x}{\cosh x}.$$

a) Leiten Sie aus $(e^x)' = e^x$ her: $(\cosh x)' = \sinh x$, $(\sinh x)' = \cosh x = \sqrt{1 + \sinh^2 x}$ sowie $(\tanh x)' = 1 - \tanh^2 x$.

b) Es seien $\operatorname{artanh} x := \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ bzw. $\operatorname{arsinh} x := \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$ die Umkehrfunktionen zu $\tanh x$ bzw. $\sinh x$. Bestimmen Sie die Ableitungen von $\operatorname{artanh} x$ und $\operatorname{arsinh} x$

(i) mit der Kettenregel aus der bekannten Ableitung von $\ln x$;

(ii) als Ableitung der Umkehrfunktion aus den nach Teil a) bekannten Ableitungen von $\tanh x$ und $\sinh x$.

Aufgabe$^{\#}$ 12.5

a) Für beliebiges $a > 0$ sei die parametrisierte Funktion f_a gegeben durch $f_a(x) = \frac{x}{a} + \frac{a}{x}$. Für welchen Wert von a wird der Flächeninhalt zwischen dem Graphen von f_a und der x-Achse über dem Intervall $[1, e]$ minimal?

b) Gegeben seien zwei Funktionen $f(x) = a^x$ und $g(x) = a^{-x}$. Wie muss a gewählt werden, damit sich die Graphen von f und g orthogonal schneiden, d.h., die Tangenten an beiden Graphen im Schnittpunkt orthogonal sind?

Aufgabe$^{\#}$ 12.6 Berechnen Sie die folgenden Integrale:

a) $\displaystyle\int_1^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$, b) $\displaystyle\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2}$, c) $\displaystyle\int_1^e \frac{\cos(\ln x)}{x} dx$, d) $\displaystyle\int_1^e \frac{dx}{x(1+\ln^2 x)}$,

e) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{\sin(x)^{37}\cos(x)^{42}}{x^6 + 17x^4 - 3x^2 + 3} dx$.

Aufgabe$^{\#}$ 12.7 Bestimmen Sie Stammfunktionen der folgenden 3 Funktionen:

a) $f(x) = \ln(x)$, b) $g(x) = x^2 e^x$, c) $h(x) = \frac{x^3}{x^4+1}$.