Dr. Anton Malevich

Pro Übungsblatt ist es in der Regel maximal 48 Punkte zu erreichen.
Falls es nicht anders vermerkt ist, gibt es pro Aufgabe maximal

12 Punkte bei 4 abzugebenden Aufgaben und

16 Punkte bei 3 abzugebenden Aufgaben.

Aufgaben und Aufgabenteile mit # werden **nicht** korrigiert und müssen **nicht** abgegeben werden.

Aufgabe 2.1 Es gilt

$$\frac{1}{3} = \frac{1+3}{5+7} = \frac{1+3+5}{7+9+11}.$$

Wie könnte das weitergehen?
Stellen Sie eine allgemeine Formel auf und beweisen Sie diese. (*Hinweis:* siehe Aufgabe 1.3)

Aufgabe 2.2 Beweisen Sie die folgenden Aussagen mit Induktion:

a) $a^n + b^n \leq (a+b)^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a, b \geq 0$.

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$.

c) $\dfrac{1}{3}n^3 + \dfrac{1}{2}n^2 + \dfrac{1}{6}n \in \mathbb{N}$ (d.h., ist eine natürliche Zahl) für alle $n \in \mathbb{N}$.
(*Hinweis:* Bringen Sie zum gemeinsamen Nenner.)

Aufgabe 2.3 Betrachten Sie die Pentagonalzahlen

$$1, 5, 12, 22, 35, \ldots$$

Veranschaulichen Sie diese Zahlenfolge zeichnerich. Wie entsteht die nächste Pentagonalzahl aus der vorherigen? Zeigen Sie, dass die n-te Pentagonalzahl gleich $\frac{1}{2}n(3n-1)$ ist.

Aufgabe# 2.4 Eine kleine Warnung zur vollständigen Induktion: manchmal muss man bei solchen Beweisen sehr genau hinschauen, sonst können sich Fehler einschleichen. Wir werden nun eine offensichtlich falsche Aussage mit vollständiger Induktion beweisen. Ihre Aufgabe ist, den Fehler im Beweis zu finden. Die Aussage lautet:

"Alle Studierenden an der Universität Mainz studieren das Gleiche."

Es sei $A(n)$ die Aussage

"In einer beliebigen Menge von n Studierenden studieren alle das Gleiche,"

die im Folgenden mit vollständiger Induktion bewiesen wird.

Beweis. Induktionssanfang: Sei $n = 1$. In einer beliebigen Menge, die nur einen Studenten oder eine Studentin enthält, ist die Aussage klar.

Induktionsschritt: Nehmen wir an, die Aussage sei für $n \in \mathbb{N}$ bewiesen. Wir nehmen uns nun eine beliebige Menge M her, in der $n + 1$ Studierende sind und wollen zeigen, dass die alle das Gleiche studieren. Geben wir den Elementen von M Namen:

$$M = \{a_1, a_2, ..., a_{n+1}\}.$$

Betrachten wir nun eine Teilmenge von M, in welcher der erste Studierende fehlt:

$$M' = \{a_2, a_3, ..., a_{n+1}\}.$$

M' enthält nur n Studierende und die studieren nach Induktionsvoraussetzung alle das Gleiche. Fehlt noch a_1, aber zu diesem Zweck betrachten wir eine zweite Teilmenge:

$$M'' = \{a_1, a_2, ..., a_n\}.$$

Auch in dieser Menge sind nur n Studierende enthalten, die wieder nach Induktionsvoraussetzung alle das Gleiche studieren. Nehmen wir uns nun ein beliebiges Element a_k aus dem Schnitt (also ein a_k aus der Menge $\{a_2, ..., a_n\}$), so folgt, dass a_1 das Gleiche studiert wie a_k und a_k das Gleiche wie a_{n+1}, denn a_1 und a_k liegen in M'' und a_k und a_{n+1} liegen in M'. Damit ist die Aussage bewiesen und alle Studierenden aus M studieren das Gleiche.

Aufgabe# 2.5 Ermitteln Sie die Anzahl d_n der Diagonalen (Verbindungsstrecken zwischen zwei Ecken, die keine Kanten sind) in einem ebenen konvexen n-Eck für $n \geq 4$. Beweisen Sie Ihre gefundene Formel mit Induktion.

Aufgabe# 2.6 Ungleichung vom arithmetischen und geometrischen Mittel.

a) Beweisen Sie für beliebige $a, b \in \mathbb{R}$, $a, b \geq 0$:

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

b) Beweisen Sie mit Induktion nach n:

$$\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n},$$

wobei $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, $a_1, \ldots, a_n \geq 0$.

Aufgaben mit # werden **nicht** korrigiert und müssen **nicht** abgegeben werden.