

Aufgabe 3.1

a) Zeichnen und berechnen Sie die ersten 12 Zeilen des Pascalschen Dreiecks (von $n = 0$ bis $n = 11$). Färben Sie in einer Zeichnung alle durch 3 teilbaren Einträge ein und in einer anderen alle durch 5 teilbaren. Sehen Sie ein Muster?

b) Berechnen Sie die folgenden Summen:

$$\text{i) } \sum_{k=0}^{11} \binom{11}{k}, \quad \text{ii) } \sum_{k=0}^{10} \binom{10}{k} (-1)^k, \quad \text{iii) } \sum_{k=0}^9 \binom{9}{k} 2^k.$$

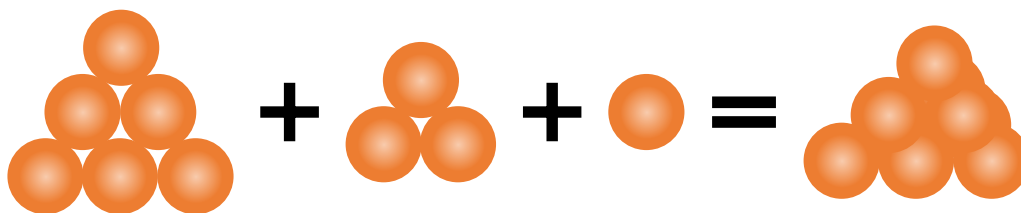
c) Beweisen Sie: Für $n, m \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$\sum_{k=0}^m \binom{n+k}{n} = \binom{n+m+1}{n+1}.$$

d) Beweisen Sie die folgende Verallgemeinerung der aus der Schule bekannten dritten binomischen Formel: Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ und alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$(x - y)(x^n + x^{n-1}y + x^{n-2}y^2 + \dots + xy^{n-1} + y^n) = x^{n+1} - y^{n+1}.$$

Aufgabe 3.2 Ein Obsthändler stapelt seine Orangen nach folgendem Mustern zu Tetraedern:



Die Anzahl Orangen, die er für einen Tetraeder mit Kantenlänge n benötigt, bezeichnen wir als n -te Tetraederzahl T_n .

a) Berechnen Sie die ersten fünf Tetraederzahlen.

b) Wo finden Sie diese Zahlen im Pascalschen Dreieck?

c) Stellen Sie eine Formel für die n -te Tetraederzahl auf und beweisen Sie diese.

Aufgabe 3.3 Sei $n \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

$$\text{a) } \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n.$$

b) Die natürliche Zahl $5^n + 7$ ist durch 4 teilbar.

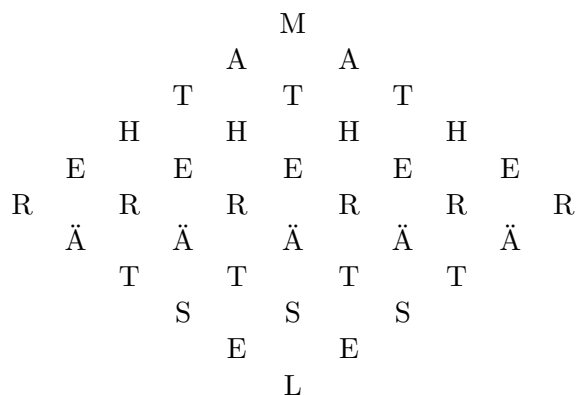
Aufgabe 3.4

a) Wenn zur Zeit 13:37 Uhr ist, wie viel Uhr ist es in 100000 Minuten?

b) Berechnen Sie die folgenden Werte:

$$\text{i) } 11^{100} \bmod 5, \quad \text{ii) } 5^{100} \bmod 3, \quad \text{iii) } 3^{102} \bmod 5.$$

Aufgabe# 3.5 Auf wie vielen Wegen lässt sich das Wort MATHERÄTSEL in der Abbildung lesen? Beginnen Sie beim Ablesen mit dem oberen Buchstaben M und gehen Sie dann immer schräg nach unten links oder unten rechts, bis Sie zu dem ganz unten stehenden Buchstaben L gelangen.

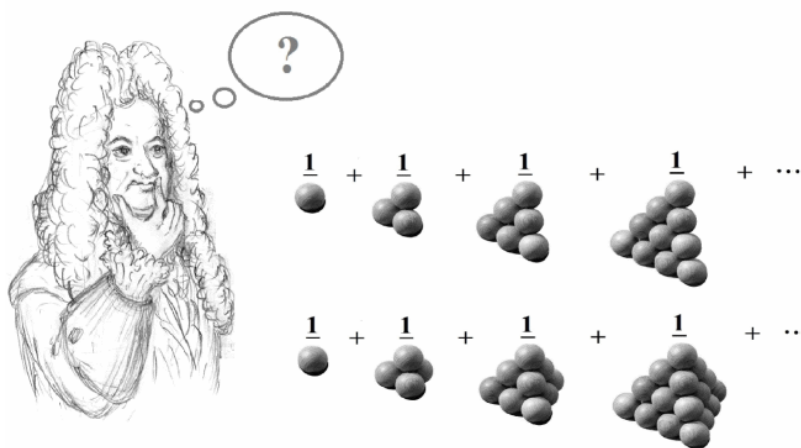


Aufgabe# 3.6 Sei $n \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

- a) Die natürliche Zahl $4^n + 15n - 1$ ist durch 9 teilbar.
- b) Die natürliche Zahl $7^{2n} - 2^n$ ist durch 47 teilbar.
- c) $\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} = n \cdot 2^{n-1}$.

Aufgabe# 3.7 Berechnen Sie die ungefähren Wahrscheinlichkeiten (in Prozent), dass beim Lotto *6 aus 49* mit einem Tipp genau r Richtige erzielt werden ($0 \leq r \leq 6$).

Aufgabe# 3.8 Helfen Sie Leibniz die Summe der reziproken Dreieckszahlen sowie die Summe der reziproken Tetraederzahlen zu bestimmen.



Aufgaben mit # werden **nicht** korrigiert und müssen **nicht** abgegeben werden.