Elementarmathematik – SS 2017 **Blatt 4**

Dr. Anton Malevich

Aufgabe 4.1 Teilbarkeit.

a) Wir suchen eine Regel für die Teilbarkeit durch 11.

   i) Berechnen Sie $10^k \bmod 11$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

   ii) Zeigen Sie: Die Zahl $(z_n \dots z_1 z_0)_{10}$ ist genau dann durch 11 teilbar, wenn ihre Wechselsumme $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k z_k$ durch 11 teilbar ist.

b) Finden Sie die Regeln für die Teilbarkeit durch 8 und 9.

c) Finden Sie eine Regel für die Teilbarkeit durch 27.

Aufgabe 4.2 Dezimalentwicklung von Brüchen.

a) Bestimmen Sie für die folgenden Brüche die Dezimalentwicklung und geben Sie jeweils die Periode an:

   i) $\dfrac{1}{24}$, ii) $\dfrac{2}{27}$, iii) $\dfrac{5}{225}$.

b) Schreiben Sie die folgenden rationalen Zahlen als unkürzbare Brüche:

   i) $4{,}08\overline{3}$, ii) $1{,}12\overline{216}$, iii) $0{,}0054\overline{9}$.

Aufgabe 4.3 Zwei Brüche $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ heißen *benachbart*, wenn $|ad - bc| = 1$ ist. Für zwei unkürzbare Brüche mit $a, c \in \mathbb{N}_0$, $b, d \in \mathbb{N}$ heißt $\frac{a+c}{b+d}$ der Mediant von $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$.
Zeigen Sie:

a) Sind $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ benachbart, dann sind die beiden Brüche unkürzbar.

b) Ist $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, so ist $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$.

c) Sind $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ benachbart, dann sind auch beide Brüche mit dem Mediant $\frac{a+c}{b+d}$ benachbart.

Aufgabe 4.4 Es Sei $\frac{a}{b}$ ein gekürzter Bruch. Der Ford-Kreis über $\frac{a}{b}$ ist der Kreis mit Mittelpunkt $M = \left(\frac{a}{b}, \frac{1}{2b^2}\right)$ und Radius $\frac{1}{2b^2}$.

a) Zeichnen Sie die Ford-Kreise zu den folgenden Brüchen (alle auf einer Zeichnung):

$$\frac{0}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{1}.$$

b) Zeigen Sie: Sind $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ zwei verschiedene Brüche mit $|bc - ad| = 1$, dann berühren sich die zugehörigen Ford-Kreise (von außen).

Aufgabe# 4.5 Was ist die kleinste natürliche Zahl, die den Rest 1 bei Division durch 2, den Rest 2 bei Division durch 3, den Rest 3 bei Division durch 4 usw. bis den Rest 9 bei Division durch 10 hat?

Aufgabe# 4.6

a) Schreiben Sie $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{11}$ und $\frac{1}{13}$ als periodische Dezimalzahlen. Welche Reste treten bei der schriftlichen Division jeweils auf?

b) Berechnen Sie die Potenzen 10^k modulo 7, 11 und 13 jeweils bis sich die Werte zu wiederholen anfangen. Welchen Zusammenhang kann man zu Aufgabenteil a) erkennen?

Aufgabe# 4.7 Schreiben Sie folgende rationalen Zahlen als gekürzte Brüche:

a) $\dfrac{5}{6} + \dfrac{4}{15}$, b) $\dfrac{21}{20} + \dfrac{12}{14}$, c) $0,\overline{142857}$, d) $0,\overline{27}$, e) $0,27\overline{45}$, f) $0,123\overline{456}$.

Aufgabe# 4.8 Auf wie viele Nullen endet (1000!)? Auf wie viele Nullen endet $\binom{1000}{500}$?

Aufgabe# 4.9 Was ist 10^{42} mod 61?

Aufgabe# 4.10 Für $n \in \mathbb{N}$ bezeichne $\sigma(n)$ die Anzahl der Teiler von n und $\varphi(n)$ die Eulersche φ-Funktion, d.h. $\varphi(n) = |\{1 \leq k \leq n : \mathrm{ggT}(k,n) = 1\}|$.
Beweisen Sie: Ist $n = pq$ mit p, q Primzahlen, so gilt

$$n + 1 = \frac{\sigma(n) + \varphi(n)}{2}, \qquad p + q = \frac{\sigma(n) - \varphi(n)}{2}.$$

Aufgaben mit # werden **nicht** korrigiert und müssen **nicht** abgegeben werden.