Aufgabe 6.1 Approximation von $\sqrt{2}$.

a) Berechnen Sie Näherungswerte für $\sqrt{2}$, indem Sie

   i) drei Schritte des Theon-Verfahrens mit Startwert $\frac{1}{1}$ durchführen (Aufgabe 5.4).

   ii) drei Schritte des Heron-Verfahrens mit Startwert 1 durchführen ((3.11) der VL).

   iii) die Näherung $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{1}{2} \cdot x - \frac{1}{8} \cdot x^2$ aus (3.16)3) der VL verwenden.

   Welche Näherung ist am besten, welche am schlechtesten?

b) Zeigen Sie: $\sqrt{2} = \frac{7}{5}\sqrt{1 + \frac{1}{49}}$. Approximieren Sie nun $\sqrt{2}$ erneut indem Sie die Näherung aus Teil a)iii) für $\sqrt{1 + \frac{1}{49}}$ verwenden. Erhalten Sie eine bessere Näherung?

c) Allgemeiner gilt: $\sqrt{2} = \frac{1}{1}\sqrt{1 + \frac{1}{1}} = \frac{3}{2}\sqrt{1 - \frac{1}{9}} = \frac{7}{5}\sqrt{1 + \frac{1}{49}}$. Raten Sie die nächsten kleinsten Zahlen $c, d \in \mathbb{N}$ mit $\sqrt{2} = \frac{d}{c}\sqrt{1 - \frac{1}{d^2}}$ bzw. $\sqrt{2} = \frac{d}{c}\sqrt{1 + \frac{1}{d^2}}$.

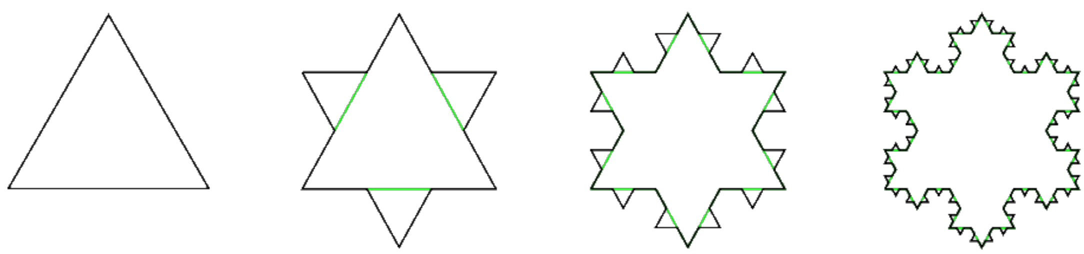
Aufgabe 6.2 Monotonie, Beschränktheit und Konvergenz.

a) Zeigen Sie, dass die beiden Folgen monoton steigend sind. Bestimmen Sie, ob die Folgen beschränkt sind (mit Begründung!). Welche dieser Folgen sind konvergent?
(i) $a_1 = \sqrt{2},\ a_{n+1} = (\sqrt{2})^{a_n}$, (ii) $b_1 = \sqrt{2},\ b_{n+1} = (b_n)^{\sqrt{2}}$.

b) Untersuchen Sie die Folge c_n auf Konvergenz in Abhängigkeit von dem Startwert c_1.

$$0 \leq c_1 \in \mathbb{Q},\ c_{n+1} = \frac{c_n^2}{2}.$$

Aufgabe 6.3 In einem gleichseitigen Dreieck mit der Seitenlänge 1 cm wird in einem ersten Schritt jede Seite in drei gleich lange Teilstrecken zerlegt und über der mittleren Teilstrecke jeweils ein gleichseitiges Dreieck außen angehängt. Dieses Verfahren wird mehrmals wiederholt. Auf diese Weise entsteht eine Schneeflocke. Dabei wird in jedem Schritt an jeder Teilstrecke der Schneeflocke ein gleichseitiges Dreieck über dem mittleren Drittel dieser Teilstrecke angehängt.



a) Leiten Sie eine Formel für den Umfang der Schneeflocke nach n Schritten her. Konvergiert die Folge der Umfänge? Ab welchem n ist der Umfang der Schneeflocke größer als der Erdumfang ($\approx 40\,075$ km)?

b) Leiten Sie eine Formel für den Flächeninhalt der Schneeflocke nach n Schritten her. Konvergiert die Folge der Flächeninhalte? Wenn ja, berechnen Sie den Grenzwert dieser Folge.

Aufgabe 6.4 Für $s \in \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{N}_0$ ist der (verallgemeinerte) Binomialkoeffizient wie folgt definiert:

$$\binom{s}{k} = \frac{s(s-1)\cdots\big(s-(k-1)\big)}{k!}.$$

Zeigen Sie:

$$\binom{1/2}{n} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1} (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n} \cdot \binom{2n-2}{n-1} \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Aufgabe# **6.5** Partialbruchzerlegung.

a) Bestimmen Sie eine explizite Formel für $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$.

b) Bestimmen Sie auf ähnliche Weise wie in a) eine explizite Formel für $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+2)}$.

Was ist also der Wert der Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+2)}$?

c) Können Sie auch den Wert der Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+\ell)}$ für beliebiges $\ell \in \mathbb{N}$ bestimmen?

d) Bestimmen Sie den Wert der Reihe $\frac{1}{1\cdot2\cdot3} + \frac{1}{2\cdot3\cdot4} + \frac{1}{3\cdot4\cdot5} + \frac{1}{4\cdot5\cdot6} + \cdots$

Aufgabe# **6.6** Bestimmen Sie den Grenzwert der Folge c_n aus Aufgabe 6.2c) in Abhängigkeit von dem Startwert.

Aufgabe# **6.7** Dominosteine werden in Form einer Treppe so weit wie möglich über eine Tischkante hinaus gestapelt, ohne dass sie herunterfallen. Jeder Stein wird mit der Breitseite nach unten und der Längsseite rechtwinklig zur Tischkante hingelegt. Um einen maximalen Überhang zu erreichen, ohne dass der Stapel umkippt, wird ein erster Dominostein der Länge ℓ so hingelegt, dass sein Schwerpunkt genau über der Tischkante liegt. Damit hat er einen maximalen Überhang. Ein zweiter Stein wird so UNTER den ersten geschoben, dass der gemeinsame Schwerpunkt beider Steine über der Tischkante liegt und der Schwerpunkt des oberen Steines auf der Kante des unteren Steines liegt. Nun wird ein dritter Stein UNTER die beiden Steine geschoben. Dabei soll ebenfalls der gemeinsame Schwerpunkt der ersten zwei Steine über der Kante des unteren Steines liegen und der gemeinsame Schwerpunkt aller drei Steine über der Tischkante liegen, damit der Stapel nicht umfällt.

Fertigen Sie Skizzen des Stapels mit $1, 2$ und 3 Dominosteinen an. Wie groß ist jeweils der Überhang? Wie groß wird der Überhang, wenn man n Dominosteine der Länge l zur Verfügung hat? Wie weit kann der Überhang gebaut werden?
(*Hinweis:* Liegt der Schwerpunkt von n Steinen bei S_1 und der Schwerpunkt von einem bei S_2, dann liegt der gemeinsame Schwerpunkt von den $n+1$ Steinen bei $\frac{n\cdot S_1+S_2}{n+1}$.)

Aufgaben mit # werden **nicht** korrigiert und müssen **nicht** abgegeben werden.