

Aufgabe 8.1 Bestimmen und skizzieren Sie die Menge $\left\{ z \in \mathbb{C} : z^4 = \frac{i}{-3 + 3i} \right\}$.

Aufgabe 8.2 Es seien $w_1 = \frac{1+i}{1-i}$, $w_2 = \frac{1}{1-i}$.

- Bestimmen Sie die Polardarstellung von w_1 bzw. w_2 .
- Lösen Sie die beiden Gleichungen $z^5 = w_1$ bzw. $z^5 = w_2$ nach z .

Aufgabe 8.3 Betrachten Sie die Gleichung

$$x^3 + 3x^2 - 2x - 6 = 0. \quad (*)$$

- Sei $f(x) = x^3 + 3x^2 - 2x - 6$. Berechnen Sie $f(-4)$, $f(-2)$, $f(0)$, $f(2)$. Skizzieren Sie den Graphen von f . Wie viele reelle Lösungen hat $(*)$?

Im Folgenden wollen wir die Nullstellen berechnen.

- Substituieren Sie $y = x + \alpha$ für ein geeignetes α um die Gleichung in die Form

$$y^3 = py + q \quad (**)$$

zu bringen.

- Verwenden Sie die Cardanische Formel um eine Lösung y von $(**)$ zu bestimmen. Ihre Lösung sollte den Wurzelausdruck $\sqrt[3]{1 + \frac{7}{3}\sqrt{-\frac{2}{3}}}$ enthalten.
- Zeigen Sie $\left(-1 + \sqrt{-\frac{2}{3}}\right)^3 = 1 + \frac{7}{3}\sqrt{-\frac{2}{3}}$
- Nutzen Sie dies, um Ihr Ergebnis aus (c) zu vereinfachen. Welcher Lösung x von $(*)$ entspricht das?
- Berechnen Sie jetzt die anderen beiden Lösungen von $(*)$.

Aufgabe 8.4 Finden Sie alle (komplexen) Lösungen der Gleichung

$$x^3 + x^2 + x + 1 = 0.$$

Aufgabe# 8.5 Finden Sie $w, z \in \mathbb{C}$ mit

- Produkt -1 und Summe 2.
- Produkt 2 und Summe 2.

(*Hinweis:* Multiplizieren Sie $(x-w)(x-z)$ aus. Welche Koeffizienten und welche Nullstellen hat das Polynom?)

Aufgabe# 8.6 Beweisen Sie: hat die quadratische Gleichung $x^2 + px + q = 0$ mit $p, q \in \mathbb{C}$ reelle Lösungen, so ist $\text{Im}(p) \cdot \text{Im}(q) = 0$. Ist die Umkehrung auch wahr?

Aufgabe# 8.7 Finden Sie alle Lösungen der Gleichung $z^3 = \sqrt{3} + i$.

Aufgaben mit # werden **nicht** korrigiert und müssen **nicht** abgegeben werden.