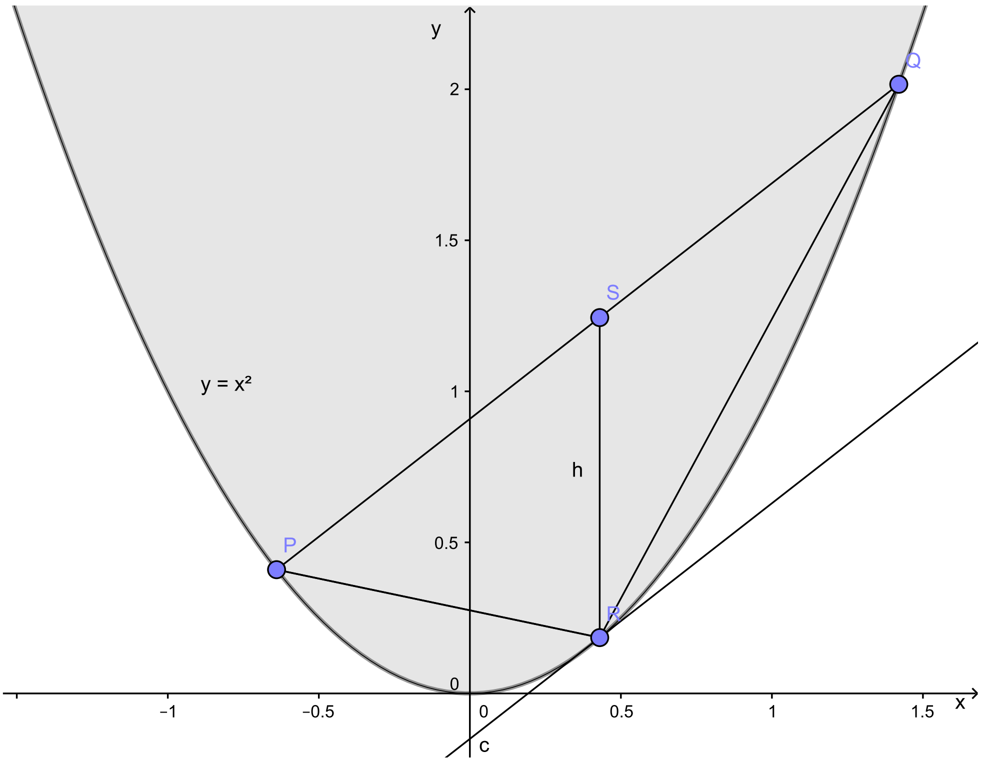
Aufgabe 9.1 Auf der Parabel mit der Gleichung $y = cx^2$, $c \in \mathbb{R}$, sind zwei Punkte $P = (a, ca^2)$ und $Q = (b, cb^2)$, $a, b \in \mathbb{R}$, $b > a$, gegeben. Der Scheitelpunkt R zu P und Q ist durch die Bedingung gegeben, dass die Steigung der Parabel im Punkt R gleich der Steigung der Geraden durch P und Q ist.



a) Zeigen Sie, dass die Gerade durch P und Q durch die Gleichung $y = xc(a+b) - cab$ gegeben ist.

b) Zeigen Sie, dass gilt $R = \left(\frac{a+b}{2}, c\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\right)$.
(*Hinweis:* Die Steigung der Parabel an der Stelle x ist durch $2cx$ gegeben.)

c) Zeigen Sie: $h = \frac{1}{4}c(b-a)^2$ (die Strecke h verläuft parallel zur y-Achse, siehe Bild).

d) Folgern Sie daraus: $A(\Delta PQR) = \frac{1}{8}c(b-a)^3$.

e) Zeigen Sie: Ist R' bzw. R'' der Scheitelpunkt zu P und R bzw. R und Q ist, so gilt

$$A(\Delta PRR') = A(\Delta RQR'') = \frac{1}{8}A(\Delta PQR).$$

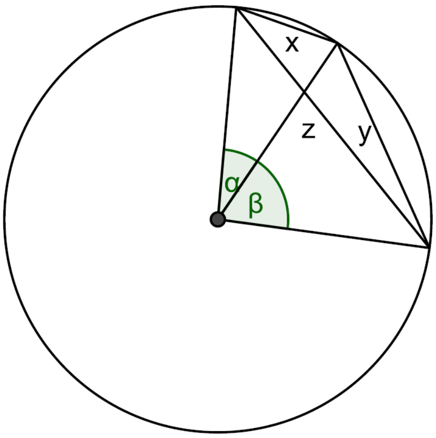
Aufgabe 9.2 Additionstheorem für Arcussinus

a) Schreiben Sie $\sin(\varphi + \psi)$ mit Hilfe des Additionstheorems so, dass in dem Term nur noch $\sin(\varphi), \sin(\psi)$ vorkommen und $\cos(\varphi), \cos(\psi)$ nicht mehr vorkommen.

b) Leiten Sie mit Hilfe Ihres Ergebnisses aus a) das Additionstheorem des arcsin her:

$$\arcsin(x) + \arcsin(y) = \arcsin\left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right).$$

c) Aus einem kreisrunden Kuchen mit Radius 1 werden zwei Stücke herausgeschnitten. Die Längen der Kreissehnen der Stücke seien durch x bzw. y gegeben. Leiten Sie eine Formel für die Länge der Kreissehne z her.



Aufgabe 9.3 Benutzen Sie in dieser Aufgabe den Wert $R = 6371\,\text{km}$ für den Erdradius.

a) Wir nehmen an, ein Seil würde um den Äquator gelegt, um $l_0 = 2\text{m}$ verlängert und dann im Kreis um die Erde gespannt. In welcher Höhe über dem Boden verliefe das Seil?

b) Wie verändert sich die Antwort aus a), wenn man das Seil um eine Kugel mit dem Radius 1m legt und dann um 2m verlängert?

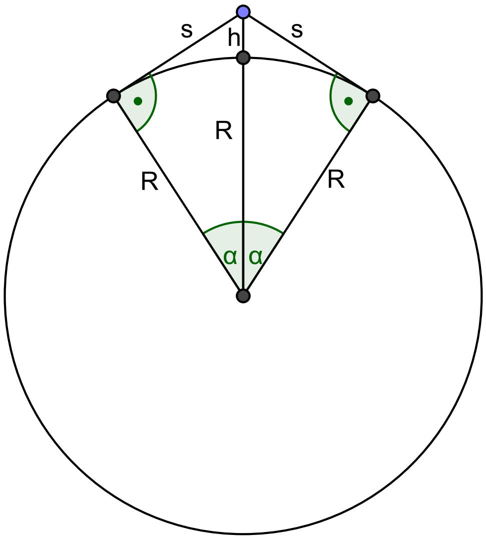
c) Das verlängerte Seil aus Teil a) wird um den Äquator gelegt und an einem Punkt straff gezogen. Wie groß in der maximale Abstand von der Erdoberfläche?

Tipp: Sie können dazu wie folgt vorgehen:

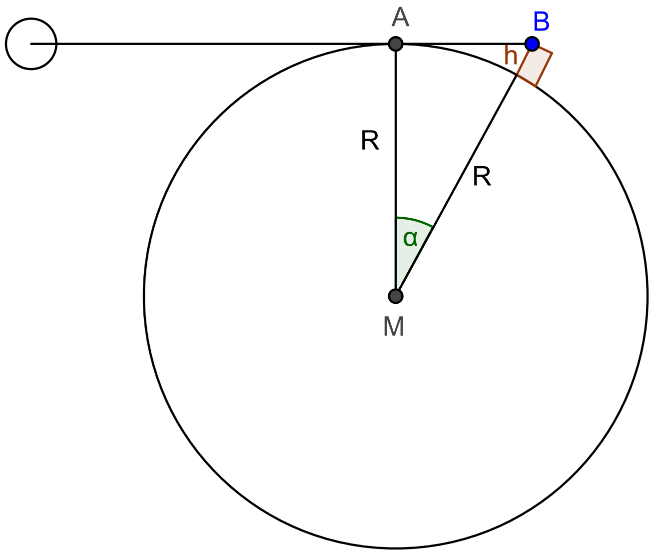
i) Berechnen Sie die Strecke s sowie die Länge des auf der Erde aufliegenden Seiles in Abhängigkeit von α. Wie lang muss das Seil bei gegebenem Winkel α sein?

ii) Verwenden Sie die Näherung für kleine Winkel $\tan(\alpha) \approx \alpha + \frac{\alpha^3}{3}$ um α aus l_0 zu bestimmen.

iii) Berechnen Sie nun h. Sie dürfen hierzu die Näherung $\cos(\alpha) \approx 1 - \frac{\alpha^2}{2}$ verwenden.



Aufgabe 9.4 Anna sitzt am Strand und erwartet den Sonnenuntergang. Bastian steht am Fenster seines Hotelzimmers im fünften Stock genau 20m über Anna. Dadurch kann er die Sonne etwas länger sehen. Er sieht den Sonnenuntergang 34,5 Sekunden später als Anna. Die beiden versuchen aus dieser Information den Erdradius zu bestimmen.



In der obigen Zeichnung ist A der Standort von Anna, wenn sie den Sonnenuntergang sieht, B derjenige von Bastian 34,5 Sekunden später. h bezeichne die Höhe seines Aussichtpunkts.

Wie groß ist α? Berechnen Sie daraus den Erdradius R und den Erdumfang.

Tipp: Verwenden Sie die Näherung $\cos(\alpha) \approx 1 - \frac{\alpha^2}{2}$ für kleine Winkel α.

Aufgabe# 9.5 Wir wollen die Fläche A_k der Figur

$$F_k = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le x^k\right\},\ \text{für } k \in K$$

ausrechnen. Dazu wählen wir eine Zahl q $(0 < q < 1)$ und zelegen das Intervall $[0, 1]$ durch Intervalle mit Endpunkten $1 > q > q^2 > q^3 > \ldots$

a) Zeigen Sie, dass für A_k die folgende Einschließung gilt:

$$\frac{1-q}{1-q^{k+1}} \le A_k \le q^{-k}\frac{1-q}{1-q^{k+1}}.$$

b) Nun können wir A_k aus der oberen Ungleichung als Grenzwert als $q \to 1$ finden. Zeigen Sie, dass $A_k = \frac{1}{k+1}$ ist. (*Hinweis:* Benutzen Sie die Summenformel für die geometrische Reihe.)