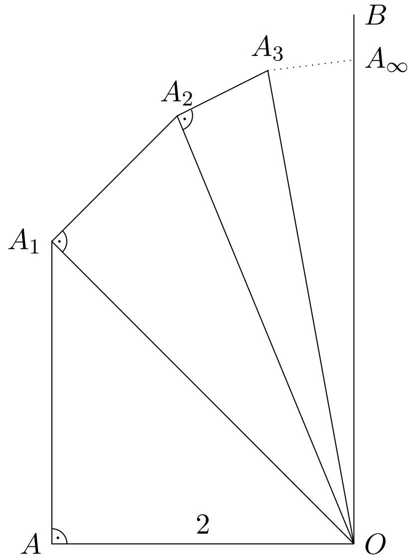
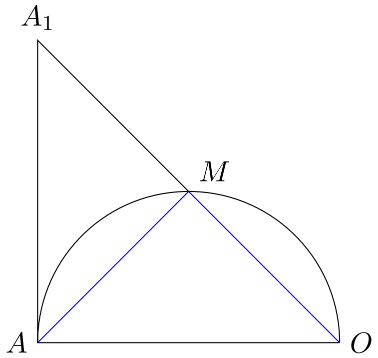
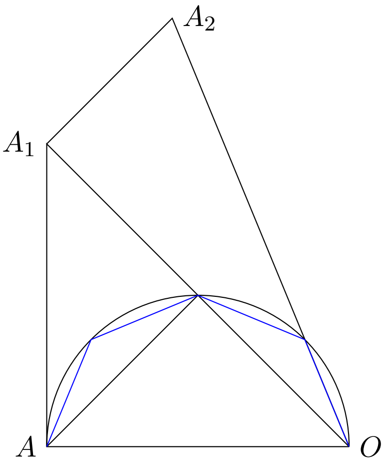
Aufgabe 10.1 Wir betrachten das “Restwinkelhalbierungsverfahren zur Ermittlung des Halbkreisumfangs”, oder, mit anderen Worten, einen Algorithmus zur Konstruktion einer Strecke der Länge π. Dies wird anhand folgender Skizze erläutert.



Dabei gilt: $|OA| = 2$, $\angle BOA = \angle OAA_1 = \angle OA_iA_{i+1} = \frac{\pi}{2}$ sowie $\angle AOA_1 = \frac{\pi}{4}$ und $\angle A_iOA_{i+1} = \frac{\pi}{2^{i+2}}$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie: $|OA_\infty| = \lim\limits_{i\to\infty} |OA_i| = \pi$, indem Sie wie folgt vorgehen.





a) Zeigen Sie zunächst, dass $|OA_1| = |OM| + |MA|$ gilt, d.h. $|OA_1|$ gleich dem Halbumfang des in den Einheitskreis eingeschriebenen Quadrates ist.

b) Zeigen Sie nun, dass $|OA_2|$ gleich dem Halbumfang des in den Einheitskreis eingeschriebenen regelmäßigen 8-Ecks ist.

c) Zeigen Sie per Induktion, dass $|OA_i|$ gleich dem Halbumfang des in den Einheitskreis eingeschriebenen regelmäßigen 2^{i+1}-Ecks ist.

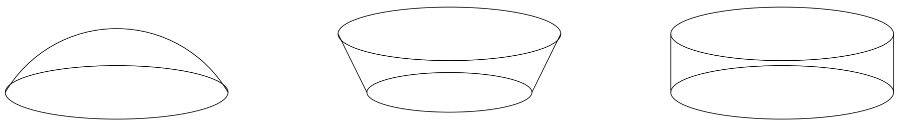
Aufgabe 10.2 Kegel, Kugel, Zylinder

a) Eine Eisdiele verkauft Eiskugeln mit Radius 2 cm in kegelförmigen Waffeln mit Radius 3 cm und Höhe 12 cm. In einer Waffel mit 2 Kugeln schmilzt das Eis und sammelt sich unten in der Waffel. Wir nehmen an, dass das Eis sein Volumen beim Schmelzen nicht verändert. Läuft die Waffel über, oder nicht? Wenn nicht, wie hoch steht das geschmolzene Eis in der Waffel?
(*Hinweis:* Das Volumen einer Kugel mit Radius r ist durch $\frac{4}{3}\pi r^3$ gegeben.)

b$^{\#}$) Leiten Sie durch Vergleich mit einem geeigneten Kegelstumpf die Formel

$$V = \pi\bigl(R - \tfrac{1}{3}h\bigr)h^2$$

für eine Kappe der Höhe h von einer Kugel mit Radius R her.



c) Der Stiel und die Kerne eines kugelförmigen Apfels mit Radius R werden mit einem Apfelstecher entfernt. Wie viel Volumen bleibt übrig, wenn der zylinderförmige Apfelstecher den Radius r hat?

Aufgabe 10.3 Es bezeichne $\ln x$ die Fläche zwischen der Hyperbel $y = \frac{1}{x}$ und der x-Achse im Intervall $[1, x]$ $(x \geq 1)$.

a) Nähern Sie $\ln 10$ durch die Fläche von 3 gleich breiten Trapezen an.

b) Zeigen Sie, dass $\ln 10 \approx \frac{10}{3}\ln 2 - \frac{1}{125}$. (*Hinweis:* Schreiben Sie $\ln\bigl(\frac{2^{10}}{10^3}\bigr)$ auf zwei verschiedene Arten und benutzen Sie die Näherung $\ln(1+x) \approx x$ für kleine x.)

c) Nähern Sie nun $\ln 2$ durch die Fläche von 3 gleich breiten Trapezen an.

d) Setzen Sie Ihre Näherung von $\ln 2$ aus c) in die Formel aus b) ein.

e) Berechnen sie den Wert von $\ln 10$ mit einem Taschenrechner. Welche der beiden Näherungen von $\ln 10$ aus a) und aus d) ist besser?

Aufgabe 10.4 Siehe (6.6) der Vorlesung für Definitionen von $\ln x$, $\log_a x$, a^x sowie e.

a) Zeigen Sie: $\log_a b = \log_{a^n}(b^n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$, $a, b > 0$, $a \neq 1$.

b) Vereinfachen Sie soweit wie möglich:
i) $\dfrac{3^{(3^3)}}{(3^3)^3}$, ii) $\log_2 10 \cdot \log_{10} 2$, iii) $\log_3 \dfrac{5}{4} + \log_9 \dfrac{24}{5} - \log_9 \dfrac{5}{6}$, iv) $\dfrac{\ln\bigl(10^{\ln(e^2)}\bigr)}{\ln 5 + \ln 2}$.

c) Lösen Sie die folgenden Gleichungen:
i) $4^x = 0{,}125$, ii) $3\ln x = \ln 56 - \ln 7$,
iii) $\log_2(10x) = 1 + \log_2 5$, iv) $\ln x = 2\ln 5 + 3\ln 2$.

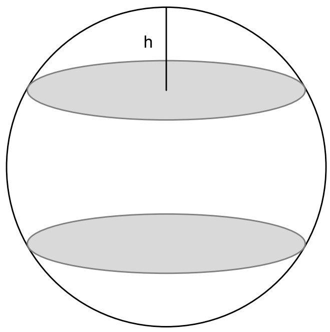
Aufgabe# 10.5 Führen Sie das Archimedes-Verfahren zur Bestimmung des Kreisumfangs durch.

a) Gehen Sie von einem ein- und einem umbeschriebenen Sechseck aus und führen Sie zwei (bis zu einem 24-Eck) Verdopplungsschritte aus. (Vereinfachen Sie die Ausdrücke mit den Wurzeln soweit wie möglich und berechnen Sie die ungefähren Werte mit dem Taschenrecher nur ganz am Ende.)

b) Führen Sie nun zwei weitere Verdopplungsschritte (bis zu einem 96-Eck) mit dem Taschenrechner aus. Als Startwerte benutzen Sie die am Ende des Teils a) bestimmten Werte. Ist Ihre Annäherung an π besser als die von Archimedes: $3+\frac{10}{71}<\pi<3+\frac{1}{7}$?

Aufgabe# 10.6 Die Lunge besteht aus 400 Millionen Lungenbläschen, die jeweils einen Radius von 0,01 cm haben. Berechnen Sie den Gesamtoberflächeninhalt aller Lungenbläschen. Welchen Radius hat eine einzige Kugel mit dem gleichen Oberflächeninhalt? (*Hinweis:* Die Oberfläche einer Kugel mit Radius r ist durch $4\pi r^2$ gegeben.)

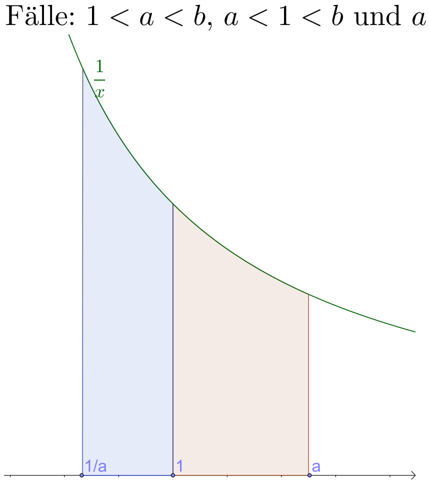
Aufgabe# 10.7 Eine Kugel vom Radius 1 soll in drei Scheiben des gleichen Volumens geschnitten werden. Stellen sie eine kubische Gleichung für die Dicke h der äußeren Scheibe auf. Bestimmen Sie mit Hilfe eines Taschenrechners oder Computers näherungsweise die Lösungen dieser Gleichung. Welche ist hier relevant?

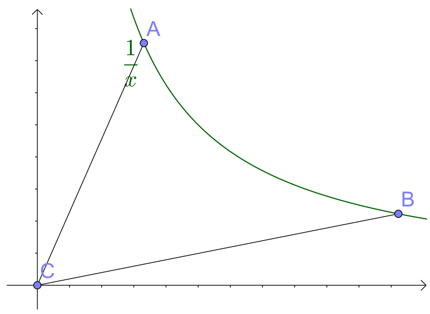


Aufgabe# 10.8

a) Zeigen Sie, dass die Flächen unter dem Graphen der Funktion $y=\frac{1}{x}$ von 1 bis a und von $\frac{1}{a}$ bis 1 übereinstimmen für alle $a\in\mathbb{R}$, $a>0$.

b) Wir wählen zwei Punkte $A=\left(a,\frac{1}{a}\right)$ und $B=\left(b,\frac{1}{b}\right)$, $a,b\in\mathbb{R}$ und $0<a<b$ auf dem Graphen der Funktion $y=\frac{1}{x}$. Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die von den Geraden von $C=(0,0)$ nach A bzw. nach B und dem Graphen der Funktion eingeschlossen wird. Drücken Sie Ihr Antwort mit ln aus; unterscheiden Sie dabei drei Fälle: $1<a<b$, $a<1<b$ und $a<b<1$.





Aufgabe# 10.9 Berechnen bzw. vereinfachen Sie:

a) i) $2^{(3^5)}$, ii) $2^{1+x} \cdot 3^x$, iii) $\sqrt{9^{x-1}}$, iv) $\sqrt[5]{10^{20x+10}}$, v) $2^x \cdot 4^{1-x} \cdot 8^x$.

b) i) $\log_3 \frac{2}{9} - \log_3 \frac{8}{27}$, ii) $\log_{\frac{1}{2}} 5 + \log_2 5$ iii) $\frac{\log_5 8}{\log_5 4}$,

iv) $\log_5 8 \cdot \log_5 4$, v) $\log_{10} 64 - \log_{10} \frac{1}{2}$, vi) $\log_2 5 + \log_2 3$.

Aufgabe# 10.10 Benutzen Sie in dieser Aufgabe den Wert $R = 6371\,\text{km}$ für den Erdradius.

a) Wir nehmen an, ein Seil würde um den Äquator gelegt, um $l_0 = 2\text{m}$ verlängert und dann im Kreis um die Erde gespannt. In welcher Höhe über dem Boden verliefe das Seil?

b) Wie verändert sich die Antwort aus a), wenn man das Seil um eine Kugel mit dem Radius 1m legt und dann um 2m verlängert?

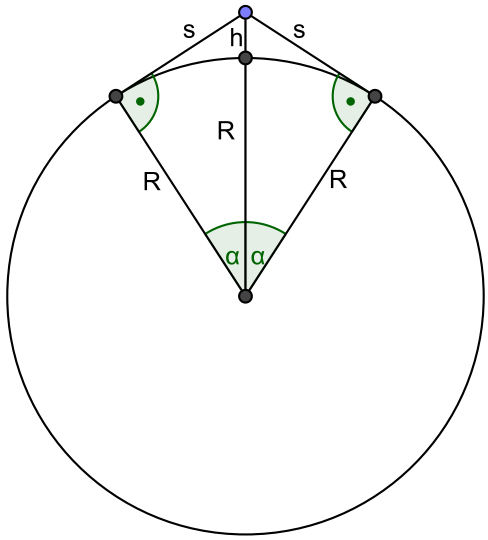
c) Das verlängerte Seil aus Teil a) wird um den Äquator gelegt und an einem Punkt straff gezogen. Wie groß in der maximale Abstand von der Erdoberfläche?

Tipp: Sie können dazu wie folgt vorgehen:

i) Berechnen Sie die Strecke s sowie die Länge des auf der Erde aufliegenden Seiles in Abhängigkeit von α. Wie lang muss das Seil bei gegebenem Winkel α sein?

ii) Verwenden Sie die Näherung für kleine Winkel $\tan(\alpha) \approx \alpha + \frac{\alpha^3}{3}$ um α aus l_0 zu bestimmen.

iii) Berechnen Sie nun h. Sie dürfen hierzu die Näherung $\cos(\alpha) \approx 1 - \frac{\alpha^2}{2}$ verwenden.



Aufgaben mit # werden **nicht** korrigiert und müssen **nicht** abgegeben werden.