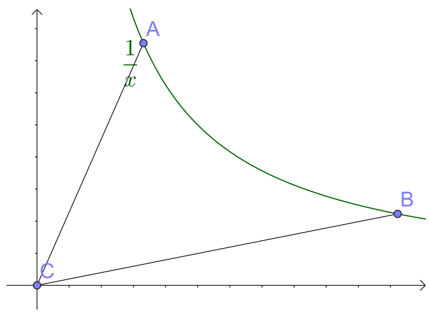
Aufgabe 11.1 Bestimmen Sie die folgenden Flächen durch Integrieren:

a) Fläche zwischen den Graphen von $y = \sqrt{x}$ und $y = x^3$.

b) Fläche zwischen dem Graphen von $y = x^3$ und der Tangente an den Graphen von $y = x^3$ im Punkt $P = (1, 1)$. (*Hinweis:* Zeigen Sie zuerst, dass $y = 3x - 2$ die Gleichung der Tangente ist.)

c) Fläche zwischen den Strecken AC, CB und der Hyperbel $y = \frac{1}{x}$, wobei $C = (0, 0)$, $A = \left(a, \frac{1}{a}\right)$ und $B = \left(b, \frac{1}{b}\right)$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ und $0 < a < b$. (*Hinweis:* Schreiben Sie zuerst die Gleichungen der Geraden durch A und C bzw. durch B und C.)



Aufgabe 11.2 Berechnen Sie mit Hilfe der Rechenregeln die Ableitungen der folgenden Funktionen. (Dabei können Sie die Ableitungen von $\sin x$, $\cos x$, $\ln x$, e^x und x^r, $r \in \mathbb{R}$, als bekannt annehmen.)

a) $f(x) = (4x^2 - x)(x^2 - 1)$, b) $f(x) = 7 \sin x + \cos x$, c) $f(a) = \tan a$,
d) $g(x) = \ln(\cos x)$, e) $h(\varphi) = \sin \varphi \cdot \cos \varphi$, f) $x(t) = s\sqrt[4]{t}$,
g) $f(x) = x^{\cos x}$, h) $f(x) = e^{x^2}$, i) $f(t) = \frac{6t^4 + 2t^2 - 7t}{2t^3}$.

Aufgabe 11.3 (3+3+6 Punkte) Wir definieren die Funktionen

$$\cosh x := \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \qquad \sinh x := \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \qquad \tanh x := \frac{\sinh x}{\cosh x}.$$

a) Beweisen Sie die Identitäten $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ sowie $\tanh^2 x + \frac{1}{\cosh^2 x} = 1$.

b) Leiten Sie aus $(e^x)' = e^x$ her:

$$(\cosh x)' = \sinh x, \quad (\sinh x)' = \cosh x, \quad (\tanh x)' = 1 - \tanh^2 x.$$

c) Es sei $\operatorname{artanh} x := \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$. Zeigen Sie, dass $\operatorname{artanh} x$ invers zur Funktion $\tanh x$ ist, d.h., dass es $\tanh(\operatorname{artanh} x) = x = \operatorname{artanh}(\tanh x)$ gilt.
Bestimmen Sie die Ableitung von $\operatorname{artanh} x$

(i) mit der Kettenregel aus der bekannten Ableitung von $\ln x$;

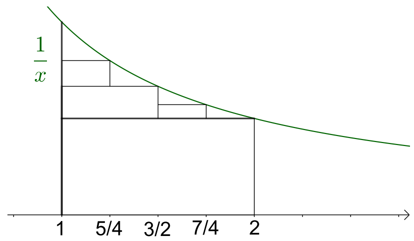
(ii) als Ableitung der Umkehrfunktion aus der nach Teil b) bekannten Ableitung von $\tanh x$.

Aufgabe 11.4 Berechnen Sie die folgenden Integrale:

a) $\displaystyle\int_e^{e^2} \frac{dx}{x\ln x}$, b) $\displaystyle\int_1^2 \frac{e^{\frac{1}{x^2}}}{x^3}\,dx$, c) $\displaystyle\int_0^1 x\sqrt{1+x}\,dx$,

d) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\cdot\cos x\,dx$, e) $\displaystyle\int_1^2 \ln x\,dx$, f) $\displaystyle\int_0^\pi x^2\sin x\,dx$.

Aufgabe$^{\#}$ 11.5 Betrachten Sie das folgende Bild.



a) Berechnen Sie den Flächeninhalt der 4 Rechtecke aus dem Bild.

b) Wie könnte man das Verfahren fortsetzen um den Flächeninhalt der von dem Graphen der Funktion $y=\frac{1}{x}$ und der x-Achse zwischen 1 und 2 eingeschlossen wird, in (unendlich viele) Rechtecke aufzuteilen?

c) Stellen Sie eine Vermutung auf, was der Flächeninhalt der weiteren Rechtecke sein wird (ohne Beweis), und folgern Sie daraus die folgende Formel:

$$\ln 2 = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}. \quad \left(\textit{Hinweis: } \frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=\frac{1}{n(n+1)}.\right)$$

Aufgabe$^{\#}$ 11.6 Finden Sie die Ableitung von

a) $4x^4-3x^2+2$,

b) $x\sqrt{x}$

c) $\sqrt{x^7}$,

d) $\frac{5\sqrt{x}}{x^5}$,

e) $\sqrt{x^2+x}$,

f) $x\cdot\sin x$,

g) $\sqrt{x+1}\cdot\ln x$,

h) $x\cdot\ln(\sin x)$,

i) x^2e^{-x},

j) $\tan(2x-4)$,

k) $\arctan\sqrt{x}$,

l) $e^{1+\sqrt{x}}$,

m) $\dfrac{x}{x+1}$,

n) $\dfrac{x}{x^2+1}$,

o) $\dfrac{\ln x}{\sin x}$.

Aufgabe$^{\#}$ 11.7 Berechnen Sie die folgenden Integrale:

a) $\displaystyle\int_{-1}^{1}\left(a^3+\frac{a^2}{2}-xa+2\right)da$, b) $\displaystyle\int_1^4\frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$, c) $\displaystyle\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}}\frac{dx}{1+x^2}$, d) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 t\,dt$,

e) $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{\sin(x)^{37}\cos(x)^{42}}{x^6+17x^4-3x^2+3}dx$.

Aufgabe$^{\#}$ 11.8 Bestimmen Sie Stammfunktionen der folgenden Funktionen:

a) $f(x)=\ln x$, b) $g(x)=x^2e^x$, c) $h(x)=\frac{x^3}{x^4+1}$, d) $f(x)=\arcsin x$.

Aufgabe# 11.9 Berechnen Sie die folgenden Integrale:

a) $\displaystyle\int_1^e \frac{\cos(\ln x)}{x}\,dx$, b) $\displaystyle\int_0^1 xe^{-x^2}\,dx$, c) $\displaystyle\int_1^e \frac{1}{x\sqrt{1+\ln x}}\,dx$,

d) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 x\,dx$, e) $\displaystyle\int_1^2 x\ln x\,dx$, f) $\displaystyle\int_0^{\pi} x^3 \sin x\,dx$, g) $\displaystyle\int_0^{\pi} e^{2x}\cos x\,dx$.

Aufgabe# 11.10 Ableitung der Umkehrfunktion.

a) Leiten Sie $(e^x)' = e^x$ aus $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ her.

b) Es gilt $\arcsin(\sin x) = x$. Leiten Sie daraus her:

$$(\arcsin t)' = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}.$$

c) Berechnen Sie nun mit Hilfe von Teil b) und partieller Integration:

$$\int_0^1 \arcsin x\,dx.$$