Aufgabe# 12.1 Beweisen Sie:

a) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 5 + \ldots + n(3n-1) = n^2(n+1)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

b) $n^5 - n$ ist für alle gerade $n \in \mathbb{N}$ durch 5 teilbar.

c) $\dfrac{1}{1\cdot 2} + \dfrac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \dfrac{1}{(n-1)n} \le 1 - \dfrac{1}{n}$ für alle $n \ge 2$.

Aufgabe# 12.2 Ganze Zahlen

a) Berechnen Sie den Rest bei der Division von 9^{42} durch 11.

b) Berechnen Sie die Summe: $\displaystyle\sum_{k=0}^{13} \binom{13}{k}$.

Aufgabe# 12.3 Rationale Zahlen

a) Rechnen Sie den Wert der folgenden Reihe aus

$$\frac{3}{4} + \frac{9}{16} + \frac{27}{64} + \cdots$$

b) Schreiben Sie $\dfrac{2}{5} + \dfrac{9}{65}$ als Dezimalzahl und geben Sie deren Periode an.

c) Geben Sie die folgende Dezimalzahl als Bruch an: $0{,}04\overline{108}$.

Aufgabe# 12.4 Es bezeichne $(z_n \ldots z_1 z_0)_{10} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} z_k 10^k$.

a) Berechnen Sie $10^k \bmod 8$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

b) Zeigen Sie: Die Zahl $(z_n \ldots z_1 z_0)_{10}$ ist genau dann durch 8 teilbar, wenn die Zahl $(z_2 z_1 z_0)_{10}$ durch 8 teilbar ist.

Aufgabe# 12.5 Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte mittels Rechenregeln:

a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{4n^2 + 5n + n\sqrt{n}}{3n^2 - 2n - 1}$, b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{2 \cdot 3^n + 4}{3^{n+1}}$, c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2}{n + 2^{-n}}$,

d) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n^2 + n!}{3^n - n!}$ (*Hinweis:* Beweisen Sie zuerst, dass $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{3^n}{n!} = 0$ ist).

Aufgabe# 12.6 Komplexe Zahlen

a) Es sei $z = 2 + \dfrac{(-3+4\mathrm{i})(1+2\mathrm{i})}{1+\mathrm{i}} \in \mathbb{C}$.
Bestimmen Sie die Polardarstellung von z und z^{-1}.

b) Skizzieren Sie die Menge $\left\{ w \in \mathbb{C} \,\middle|\, w^4 = 3\mathrm{i} - \sqrt{3} \right\}$ in der komplexen Ebene.
(Mit Begründung!)

c) Zeichnen Sie die folgenden Mengen in der komplexen Ebene:

$$A = \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, \frac{\pi}{4} \le \operatorname{Arg} z \le \frac{3\pi}{4} \right\} \text{ und } B = \left\{ z^3 \mid z \in A \right\}.$$

Aufgabe# 12.7 Eine Eisdiele verkauft Eiskugeln mit Radius $\frac{3}{2}$ cm in kegelförmigen Waffeln mit Radius 2 cm und Höhe 8 cm. In einer Waffel mit 2 Kugeln schmilzt das Eis und sammelt sich unten in der Waffel. Wir nehmen an, dass das Eis sein Volumen beim Schmelzen nicht verändert.

a) Beweisen Sie, dass die Waffel nicht überläuft.

b) Wie hoch steht das geschmolzene Eis in der Waffel?

Aufgabe# 12.8 Finden Sie alle (komplexen) Lösungen der Gleichung $x^3 - 2x + 4 = 0$.

Aufgabe# 12.9 Exponenten und Logarithmen

a) Vereinfachen Sie:

i) $\log_9(18) - \log_3(1) + \log_9\left(\frac{9}{2}\right) - \log_9(81)$.

ii) $\left(e^3\right)^4 \cdot e^{\log_2(64)} \cdot \left((e^{-3})^{-2}\right)^{-3}$.

b) Lösen Sie die folgenden Gleichungen:

i) $4^x = 0{,}125$, ii) $3\ln x = \ln 56 - \ln 7$,

iii) $\log_2(10x) = 1 + \log_2 5$, iv) $\ln x = 2\ln 5 + 3\ln 2$.

c) Bestimmen Sie den ungefähren Wert von $\ln 2$, indem Sie ihn durch die Fläche von 3 gleich breiten Trapezen nähern.

Aufgabe# 12.10 Berechnen Sie die ersten und zweiten Ableitungen der Funktionen:

a) $g(x) = e^{x^2+3}$, b) $g(x) = x^2 e^{\frac{1}{x}}$, c) $g(x) = x^{\sin x}$, d) $g(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$.

Aufgabe# 12.11 Berechnen Sie die folgenden Integrale:

a) $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{2} x\ln(2x)\, dx$, b) $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{\ln(2x)}{x}\, dx$, c) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x\, dx$, d) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{e^{\tan x} - \frac{1}{\tan x}}{\cos^2 x} dx$.

Aufgabe# 12.12 Wir definieren die Funktionen

$$\cosh x := \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \qquad \sinh x := \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \qquad \tanh x := \frac{\sinh x}{\cosh x}.$$

a) Beweisen Sie die folgenden Identitäten:

(i) $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ sowie $\tanh^2 x + \frac{1}{\cosh^2 x} = 1$,

(ii) $\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$.

b) Beweisen Sie: $(\sinh x)' = \cosh x$, $(\cosh x)' = \sinh x$, $(\tanh x)' = 1 - \tanh^2 x$.

c) Sei $\operatorname{artanh} x$ die zur $\tanh x$ inverse Funktion. Zeigen Sie, dass $(\operatorname{artanh} t)' = \frac{1}{1-t^2}$ ist.