

Aufgabe 3.1 Binomialkoeffizienten

- a) Beweisen Sie: $\binom{n}{k} = \frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1}$ für $n, k \in \mathbb{N}$, $0 < k \leq n$.
- b) Benutzen Sie Teil a) und Aufgabe 2.4a) um zu zeigen: $\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} = n \cdot 2^{n-1}$ für $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 3.2

- a) Zeichnen und berechnen Sie die ersten 12 Zeilen des Pascalschen Dreiecks (von $n = 0$ bis $n = 11$). Färben Sie in einer Zeichnung alle durch 3 teilbaren Einträge ein und in einer anderen alle durch 5 teilbaren. Sehen Sie ein Muster?

- b) Berechnen Sie die folgenden Summen:

i) $\sum_{k=0}^{11} \binom{11}{k}$, ii) $\sum_{k=0}^{10} \binom{10}{k} (-1)^k$, iii) $\sum_{k=0}^9 \binom{9}{k} 2^k$.

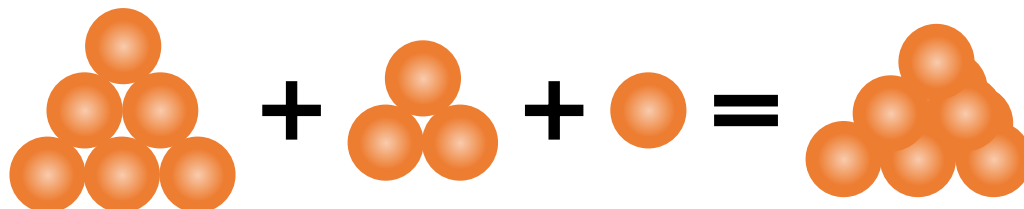
- c) Beweisen Sie: Für $n, m \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$\sum_{k=0}^m \binom{n+k}{n} = \binom{n+m+1}{n+1}.$$

- d) Beweisen Sie die folgende Verallgemeinerung der aus der Schule bekannten dritten binomischen Formel: Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ und alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$(x - y)(x^n + x^{n-1}y + x^{n-2}y^2 + \dots + xy^{n-1} + y^n) = x^{n+1} - y^{n+1}.$$

Aufgabe 3.3 Ein Obsthändler stapelt seine Orangen wie folgt zu Tetraedern:



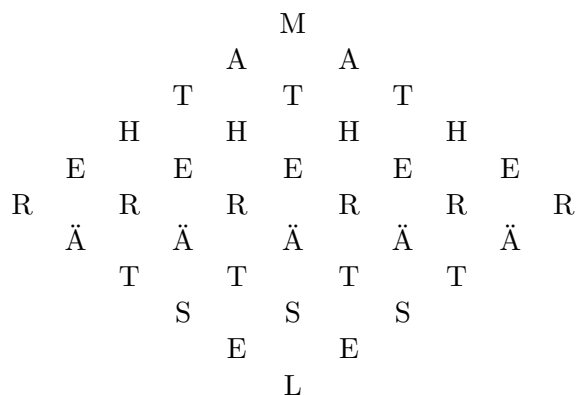
Die Anzahl Orangen, die er für einen Tetraeder mit Kantenlänge n benötigt, bezeichnen wir als n -te Tetraederzahl T_n .

- a) Berechnen Sie die ersten fünf Tetraederzahlen.
- b) Wo finden Sie diese Zahlen im Pascalschen Dreieck?
- c) Stellen Sie eine Formel für die n -te Tetraederzahl auf und beweisen Sie diese.

Aufgabe 3.4

- a) Wenn zur Zeit 13:37 Uhr ist, wie viel Uhr ist es in 100000 Minuten?
- b) Wenn Petra 1997 an einem Montag Geburtstag hatte, an welchem Wochentag hat sie im Jahr 2018 Geburtstag?
- c) Wenn der 22. Tag eines Jahres ein Mittwoch ist, was für ein Wochentag ist dann der 193. Tag desselben Jahres?

Aufgabe# 3.5 Auf wie vielen Wegen lässt sich das Wort MATHERÄTSEL in der Abbildung lesen? Beginnen Sie beim Ablesen mit dem oberen Buchstaben M und gehen Sie dann immer schräg nach unten links oder unten rechts, bis Sie zu dem ganz unten stehenden Buchstaben L gelangen.

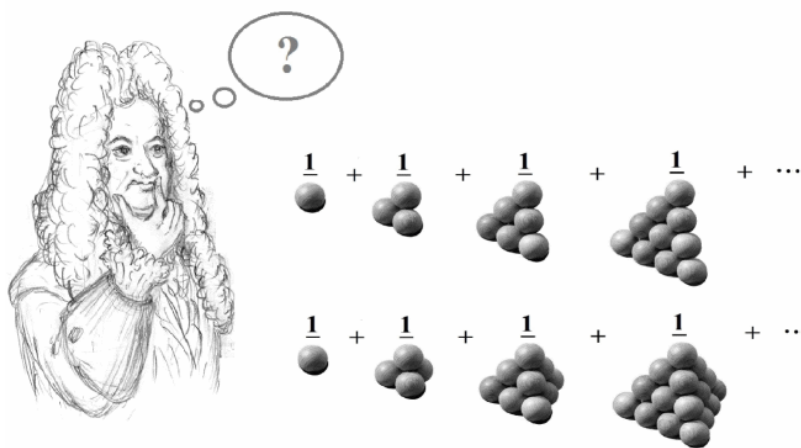


Aufgabe# 3.6 Sei $n \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

- a) Die natürliche Zahl $4^n + 15n - 1$ ist durch 9 teilbar.
- b) Die natürliche Zahl $7^{2n} - 2^n$ ist durch 47 teilbar.

Aufgabe# 3.7 Berechnen Sie die ungefähren Wahrscheinlichkeiten (in Prozent), dass beim Lotto *6 aus 49* mit einem Tipp genau r Richtige erzielt werden ($0 \leq r \leq 6$).

Aufgabe# 3.8 Helfen Sie Leibniz die Summe der reziproken Dreieckszahlen sowie die Summe der reziproken Tetraederzahlen zu bestimmen.



Aufgaben mit # werden **nicht** korrigiert und müssen **nicht** abgegeben werden. Sie werden womöglich noch **vor** der Abgabe in den Übungen gelöst.