Aufgabe 4.1

a) Was ist die kleinste natürliche Zahl, die den Rest 1 bei Division durch 6 und den Rest 3 bei Division durch 5 hat?

b) Gibt es eine natürliche Zahl, die den Rest 1 bei Division durch 6, den Rest 3 bei Division durch 5 und den Rest 8 bei Division durch 10 hat?

c) Bestimmen Sie die kleinste natürliche Zahl, die den Rest 1 bei Division durch 2, den Rest 2 bei Division durch 3, den Rest 3 bei Division durch 4 usw. bis den Rest 9 bei Division durch 10 hat?

Aufgabe 4.2

a) Beweisen Sie **Folgerung 2.7** der Vorlesung:
Ist $a \equiv b \bmod n$, so gilt auch $a^k \equiv b^k \bmod n$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

b) Zeigen Sie: $6^k \equiv 6 \bmod 10$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

c) Berechnen Sie die folgenden Werte:
i) $11^{100} \bmod 5$, ii) $5^{100} \bmod 3$, iii) $3^{102} \bmod 5$.

Aufgabe 4.3 Zehnerpotenzen

a) Wir suchen eine Regel für die Teilbarkeit durch 11.

   i) Berechnen Sie $10^k \bmod 11$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

   ii) Zeigen Sie: Die Zahl $(z_n \ldots z_1 z_0)_{10}$ ist genau dann durch 11 teilbar, wenn ihre Wechselsumme $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k z_k$ durch 11 teilbar ist.

b) Finden Sie die Regeln für die Teilbarkeit durch 8 und 9.

c) Berechnen Sie den Rest bei der Division von 10^{42} durch 14 sowie 10^{42} durch 22. (*Hinweis:* Stellen Sie 42 als Summe der Zweierpotenzen dar und berechnen Sie $10^{2^\ell} \bmod 14$ bzw. 22 für verschiedene Zweierpotenzen 2^ℓ.)

Aufgabe 4.4 Benachbarte Brüche

Es seien $a, c \in \mathbb{N}_0$, $b, d \in \mathbb{N}$. Ein Bruch $\frac{a}{b}$ ist unkürzbar, falls $\mathrm{ggT}(a, b) = 1$ ist. Zwei Brüche $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ heißen *benachbart*, wenn $|ad - bc| = 1$ ist. Für zwei unkürzbare Brüche heißt $\frac{a+c}{b+d}$ der *Mediant* von $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$. Zeigen Sie:

a) Sind $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ benachbart, dann sind die beiden Brüche unkürzbar.

b) Ist $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, so ist $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$.

c) Sind $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ benachbart, dann sind auch beide Brüche mit dem Mediant $\frac{a+c}{b+d}$ benachbart.

Aufgabe$^{\#}$ 4.5

a) Zeigen Sie: Teilt man eine Quadratzahl durch 7, so bleibt nie der Rest 3, 5 oder 6.

b) Beweisen Sie ohne Induktion:

   i) $5^n + 7$ ist fur alle $n \in \mathbb{N}$ durch 4 teilbar.

   ii) $n^2 - 1$ ist fur alle ungerade $n \in \mathbb{N}$ durch 8 teilbar.

Aufgabe$^{\#}$ 4.6 Auf wie viele Nullen endet (1000!)? Auf wie viele Nullen endet $\binom{1000}{500}$?

Aufgabe$^{\#}$ 4.7 Was ist der Rest von 10^{42} bei Division durch 61?

Aufgabe$^{\#}$ 4.8 Schreiben Sie die Zahlen von 1 bis 9 hintereinander. Streichen Sie 3 mal in Folge entweder die Zahl ganz links oder ganz rechts (z.B. 1, 9, 8 oder 1, 2, 3 etc.). Addieren Sie die 3 gestrichenen Zahlen und Teilen Sie das Ergebnis durch 6 (wieso teilt 6 diese Zahl?); die 4 liegt nun an der Stelle ihres Ergebnisses.

Dies funktioniert auch für die Zahlen von 1 bis 14, das Streichen von 4 Zahlen und das Teilen durch 10; die 5 steht dann an der richtigen Stelle.

Wie verallgemeinert man dies?

Aufgabe$^{\#}$ 4.9 Es Sei $\frac{a}{b}$ ein gekürzter Bruch. Der Ford-Kreis über $\frac{a}{b}$ ist der Kreis mit Mittelpunkt $M = \left(\frac{a}{b}, \frac{1}{2b^2}\right)$ und Radius $\frac{1}{2b^2}$.

a) Zeichnen Sie die Ford-Kreise zu den folgenden Brüchen (alle auf einer Zeichnung):

$$\frac{0}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{1}.$$

b) Zeigen Sie: Sind $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ zwei verschiedene Brüche mit $|bc - ad| = 1$, dann berühren sich die zugehörigen Ford-Kreise (von außen).

Aufgaben mit $^{\#}$ werden **nicht** korrigiert und müssen **nicht** abgegeben werden. Sie werden womöglich noch **vor** der Abgabe in den Übungen gelöst.