Dr. Anton Malevich

**Aufgabe 6.1** (2+3+2+2+3 Punkte) Approximation von $\sqrt{2}$ nach Theon.

a) Zeigen Sie: Aus $0 < \frac{a}{b} < \sqrt{2}$ folgt $\frac{a+2b}{a+b} > \sqrt{2}$.

Beim Algorithmus von Theon von Smyrna zur Approximation von $\sqrt{2}$ wählt man beliebige $a_0, b_0 \in \mathbb{N}$ als Anfangswerte und bestimmt iterativ $a_{n+1} = a_n + 2b_n$ und $b_{n+1} = a_n + b_n$. Wir wollen zeigen, dass die Folge $\frac{a_0}{b_0}, \frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \ldots, \frac{a_n}{b_n}, \ldots$ gegen $\sqrt{2}$ konvergiert.

b) Es gilt $\left|\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} - \sqrt{2}\right| < \left|\frac{a_n}{b_n} - \sqrt{2}\right|$. (Diese Aussage müssen Sie nicht beweisen!)

Überlegen sie, warum dies noch nicht zeigt, dass $\frac{a_n}{b_n}$ gegen $\sqrt{2}$ konvergiert. Geben Sie hierzu als Gegenbeispiel eine Folge an, die dieser Bedingung genügt, aber nicht konvergent ist (*3 Punkte*) ODER die gegen 1 konvergiert (*1 Punkt*).

c) Zeigen Sie, dass $f_n = \left|2b_n^2 - a_n^2\right|$ unabhängig von $n$ ist.
D.h., zeigen Sie, dass $f_n = f_0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist.

d) Zeigen Sie: $b_n \geq n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und somit $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = 0$.

e) Zeigen Sie: $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right)^2 = 2$. (*Hinweis:* Benutzen Sie c) und d).)

**Aufgabe 6.2** (7+4+1 Punkte) Approximation von $\sqrt{2}$.

a) Berechnen Sie Näherungswerte (Brüche) für $\sqrt{2}$, indem Sie

i) drei Schritte des Theon-Verfahrens mit Startwert $\frac{1}{1}$ durchführen (Aufgabe 6.1).

ii) drei Schritte des Heron-Verfahrens mit Startwert 1 durchführen ((3.11) der VL).

iii) die Näherung $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{1}{2} \cdot x - \frac{1}{8} \cdot x^2$ aus (3.16)3) der VL verwenden.

Welche Näherung ist am besten, welche am schlechtesten? (Erst hier dürfen Sie einen Taschenrechner benutzen.)

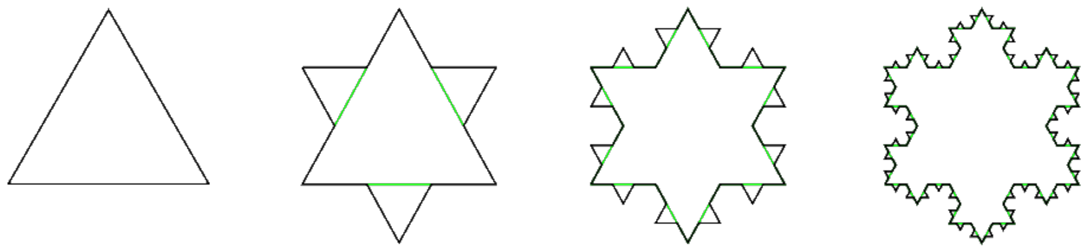
b) Zeigen Sie: $\sqrt{2} = \frac{7}{5}\sqrt{1 + \frac{1}{49}}$. Approximieren Sie nun $\sqrt{2}$ erneut indem Sie die Näherung aus Teil a)iii) für $\sqrt{1 + \frac{1}{49}}$ verwenden. Erhalten Sie eine bessere Näherung?

c) Allgemeiner gilt: $\sqrt{2} = \frac{1}{1}\sqrt{1 + \frac{1}{1}} = \frac{3}{2}\sqrt{1 - \frac{1}{9}} = \frac{7}{5}\sqrt{1 + \frac{1}{49}}$. Raten Sie die nächsten kleinsten Zahlen $c, d \in \mathbb{N}$ (zwei Paaren) mit $\sqrt{2} = \frac{d}{c}\sqrt{1 - \frac{1}{d^2}}$ bzw. $\sqrt{2} = \frac{d}{c}\sqrt{1 + \frac{1}{d^2}}$.

**Aufgabe 6.3** Zwei Fahrradfahrer fahren auf einer 60 km langen geraden Strecke aufeinander zu. Jeder Fahrradfahrer fährt mit konstanter Geschwindigkeit von 30 km/h. Eine Biene fliegt mit einer konstanten Geschwindigkeit von 50 km/h vom ersten Fahrradfahrer in Richtung des zweiten Fahrradfahrers. Sobald sie diesen erreicht dreht sie um und fliegt dem ersten Fahrradfahrer entgegen. Dies wiederholt sich so lange, bis die beiden Fahrradfahrer zusammentreffen.

Berechnen Sie den Zeitpunkt, an dem sich die Biene und der zweite Fahrradfahrer zum ersten mal treffen. Welche Strecke hat die Biene in dieser Zeit zurückgelegt? Wann trifft die Biene wieder beim ersten Radfahrer ein? Welcher Strecke entspricht das? Führen Sie Ihre Überlegung fort und zeigen Sie, dass die Strecke zwischen zwei Umdrehen sich jedes Mal viertelt. Geben Sie nun die gesamte Flugstrecke der Biene (bis zum Treffen der beiden Fahrradfahrer) mit Hilfe einer geometrischen Reihe an und rechnen Sie diese aus.

**Aufgabe 6.4** In einem gleichseitigen Dreieck mit der Seitenlänge 1 cm wird in einem ersten Schritt jede Seite in drei gleich lange Teilstrecken zerlegt und über der mittleren Teilstrecke jeweils ein gleichseitiges Dreieck außen angehängt. Dieses Verfahren wird mehrmals wiederholt. Auf diese Weise entsteht eine Schneeflocke. Dabei wird in jedem Schritt an jeder Teilstrecke der Schneeflocke ein gleichseitiges Dreieck über dem mittleren Drittel dieser Teilstrecke angehängt.



a) Leiten Sie eine Formel für den Umfang der Schneeflocke nach $n$ Schritten her. Konvergiert die Folge der Umfänge? Ab welchem $n$ ist der Umfang der Schneeflocke größer als der Erdumfang ($\approx 40\,075$ km)?

b) Leiten Sie eine Formel für den Flächeninhalt der Schneeflocke nach $n$ Schritten her. Konvergiert die Folge der Flächeninhalte? Wenn ja, berechnen Sie den Grenzwert dieser Folge.

**Aufgabe# 6.5** Zeigen Sie, dass $\sqrt{3}$ (und im Allgemeinen $\sqrt{p}$ für eine Primzahl $p$) keine rationale Zahl ist.

**Aufgabe# 6.6** Berechnen Sie die Flugstrecke der Biene bis zum Treffen der beiden Fahrradfahrer (siehe Aufgabe 6.3) ohne Verwendung von Reihen.

**Aufgabe# 6.7** Dominosteine werden in Form einer Treppe so weit wie möglich über eine Tischkante hinaus gestapelt, ohne dass sie herunterfallen. Jeder Stein wird mit der Breitseite nach unten und der Längsseite rechtwinklig zur Tischkante hingelegt. Um einen maximalen Überhang zu erreichen, ohne dass der Stapel umkippt, wird ein erster Dominostein der Länge $\ell$ so hingelegt, dass sein Schwerpunkt genau über der Tischkante liegt. Damit hat er einen maximalen Überhang. Ein zweiter Stein wird so UNTER den ersten geschoben, dass der gemeinsame Schwerpunkt beider Steine über der Tischkante liegt und der Schwerpunkt des oberen Steines auf der Kante des unteren Steines liegt. Nun wird ein dritter Stein UNTER die beiden Steine geschoben. Dabei soll ebenfalls der gemeinsame Schwerpunkt der ersten zwei Steine über der Kante des unteren Steines liegen und der gemeinsame Schwerpunkt aller drei Steine über der Tischkante liegen, damit der Stapel nicht umfällt.
Fertigen Sie Skizzen des Stapels mit $1, 2$ und $3$ Dominosteinen an. Wie groß ist jeweils der Überhang? Wie groß wird der Überhang, wenn man $n$ Dominosteine der Länge $l$ zur Verfügung hat? Wie weit kann der Überhang gebaut werden?
(*Hinweis:* Liegt der Schwerpunkt von $n$ Steinen bei $S_1$ und der Schwerpunkt von einem bei $S_2$, dann liegt der gemeinsame Schwerpunkt von den $n+1$ Steinen bei $\frac{n \cdot S_1 + S_2}{n+1}$.)

Aufgaben mit # werden **nicht** korrigiert und müssen **nicht** abgegeben werden. Sie werden womöglich noch **vor** der Abgabe in den Übungen gelöst.