Dr. Anton Malevich

Aufgabe 7.1 Monotonie, Beschränktheit und Konvergenz.

a) Zeigen Sie, dass die beiden Folgen monoton steigend sind. Bestimmen Sie, ob die Folgen beschränkt sind (mit Begründung!). Welche dieser Folgen sind konvergent?
(i) $a_1 = \sqrt{2},\ a_{n+1} = (\sqrt{2})^{a_n}$, (ii) $b_1 = \sqrt{2},\ b_{n+1} = (b_n)^{\sqrt{2}}$.

b) Untersuchen Sie die Folge c_n auf Konvergenz in Abhängigkeit von dem Startwert c_1.
$$0 \le c_1 \in \mathbb{Q},\ c_{n+1} = \frac{c_n^2}{2}.$$

Aufgabe 7.2 Für $s \in \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{N}_0$ ist der (verallgemeinerte) Binomialkoeffizient wie folgt definiert:
$$\binom{s}{k} = \frac{s(s-1)\cdots\big(s-(k-1)\big)}{k!}.$$
Zeigen Sie:
$$\binom{1/2}{n} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1} (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n} \cdot \binom{2n-2}{n-1} \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Aufgabe 7.3 Es seien $z_1 = -\dfrac{6-2\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}} - \dfrac{6}{1+\mathrm{i}},\ z_2 = \dfrac{2+7\mathrm{i}}{3\mathrm{i}} - \dfrac{1}{\mathrm{i}}$.
Stellen Sie die Zahlen z_1, z_2, z_1+z_2, $\overline{z_1+z_2}$, $z_1 \cdot z_2$, $\overline{z_1 \cdot z_2}$ und $\frac{z_1}{z_2}$ in der Form $a+\mathrm{i}b$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ dar. Berechnen Sie zudem $|z_1|$, $|z_2|$, $|z_1+z_2|$, $|z_1 \cdot z_2|$ und $\left|\frac{z_1}{z_2}\right|$.

Aufgabe 7.4 Komplexe Zahlenebene

a) Es gibt genau zwei Zahlen $z \in \mathbb{C}$ mit der Eigenschaft $z^2 = \mathrm{i}$. Zeichnen Sie die beiden in der komplexen Zahlenebene und berechnen Sie diese.

b) Skizzieren Sie die folgenden Mengen in der komplexen Zahlenebene:
$$A = \{\, z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) + |\mathrm{Im}(z)| \le 1 \,\},$$
$$B = \{\, z \in \mathbb{C} \mid |z| \le 2 \,\},$$
$$C = \left\{ \frac{6+8i}{5} \cdot z \;\middle|\; z \in B \right\}.$$

Aufgabe# 7.5 Partialbruchzerlegung.

a) Bestimmen Sie eine explizite Formel für $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$.

b) Bestimmen Sie auf ähnliche Weise wie in a) eine explizite Formel für $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+2)}$.

Was ist also der Wert der Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+2)}$?

c) Können Sie auch den Wert der Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+\ell)}$ für beliebiges $\ell \in \mathbb{N}$ bestimmen?

d) Bestimmen Sie den Wert der Reihe $\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4} + \frac{1}{3\cdot 4\cdot 5} + \frac{1}{4\cdot 5\cdot 6} + \cdots$

Aufgabe# 7.6 Bestimmen Sie den Grenzwert der Folge c_n aus Aufgabe 7.1b) in Abhängigkeit von dem Startwert.

Aufgabe# 7.7

a) Zeigen Sie, dass die Reihe $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^k}$ nach oben beschränkt ist und somit konvergiert.

Zeigen Sie nun, dass $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^k} = 2$ ist. (*Hinweis:* Spalten Sie den ersten Summanden ab und führen Sie zur selben Summe zurück.) *Lösungsweg 2:* Umsortieren der Summanden in $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \ldots$)

b) Zeigen Sie: $\sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{4} \cdot \sqrt[8]{8} \cdots = 4$.

Aufgabe# 7.8 Es seien $z_1 = -\dfrac{1-\mathrm{i}}{2+\mathrm{i}} - \dfrac{3+\mathrm{i}}{4}$, $z_2 = \dfrac{(1+\mathrm{i})^2}{2} - \dfrac{6+5\mathrm{i}}{\mathrm{i}^3}$.

Stellen Sie die Zahlen z_1, z_2, $z_1 + z_2$, $\overline{z_1 + z_2}$, $z_1 \cdot z_2$, $\overline{z_1 \cdot z_2}$ und $\frac{z_1}{z_2}$ in der Form $a + \mathrm{i}b$, mit $a, b \in \mathbb{R}$, dar. Berechnen Sie zudem $|z_1|$, $|z_2|$, $|z_1 + z_2|$, $|z_1 \cdot z_2|$ und $\left|\frac{z_1}{z_2}\right|$.

Aufgabe# 7.9 Skizzieren Sie die Mengen $A \cap B$ und $A \cup B$, wobei

a) $A = \{ z \in \mathbb{C} \,|\, |z-1| \leq 1\}$ und $B = \{ z \in \mathbb{C} \,|\, |\mathrm{Re}(z)| + |\mathrm{Im}(z)| \leq 1\}$,

b) $A = \{ z \in \mathbb{C} \,|\, |z-\mathrm{i}| \leq 1\}$ und $B = \left\{ z \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Re}(z) + |\mathrm{Im}(z)|^2 \leq 1\right\}$,

c) $A = \{ z \in \mathbb{C} \,|\, 2 \leq |z-1| \leq 4\}$ und $B = \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, \left|\frac{3-4\mathrm{i}}{z-1+2\mathrm{i}}\right| < 5\right\}$.

d) $A = \{ z \in \mathbb{C} \,|\, |z-(2+2i)|\} = |z-(-2-2i)|$.

Aufgabe# 7.10 Zeigen Sie, dass alle komplexe Zahlen vom Betrag 1 und ungleich -1 als

$$\frac{1+\mathrm{i}x}{1-\mathrm{i}x}, \quad x \in \mathbb{R},$$

geschrieben werden können.

Stellen Sie konkret die Zahlen 1, i und $-\mathrm{i}$ in dieser form dar!

Aufgaben mit # werden **nicht** korrigiert und müssen **nicht** abgegeben werden.