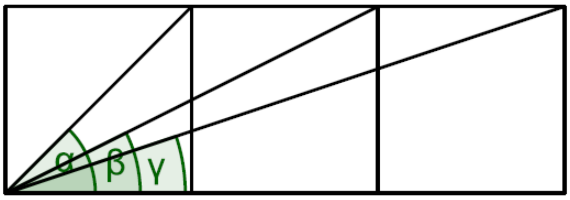
Aufgabe 8.1 Trigonometrie

a) Berechnen Sie $\sin\alpha$ und $\cos\alpha$ für $\alpha = \pi, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6}, 0$. Verwenden Sie dafür nur die Definition von Cosinus und Sinus mittels des Einheitskreises, sowie elementare Eigenschaften von Dreiecken.

b) Verwenden Sie die Verdopplungsformeln um zu zeigen: $\cos\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{1}{2}\sqrt{\sqrt{3}+2}$.

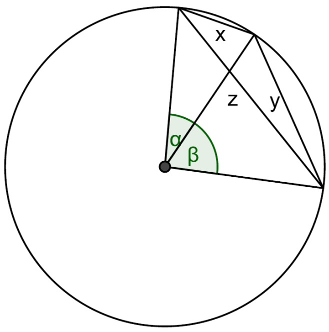
c) In der folgenden Zeichnung sind die drei Quadrate gleich groß.
Zeigen Sie $\alpha+\beta+\gamma = \frac{\pi}{2}$ mit Verwendung komplexer Zahlen.



Aufgabe 8.2 (*2+10 Punkte*)

a) Seien $\varphi, \psi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Schreiben Sie $\sin(\varphi+\psi)$ mit Hilfe des Additionstheorems so, dass in dem Term nur noch $\sin(\varphi), \sin(\psi)$ vorkommen und $\cos(\varphi), \cos(\psi)$ nicht mehr vorkommen.

b) Aus einem kreisrunden Kuchen mit Radius 1 werden zwei Stücke herausgeschnitten. Die Längen der Kreissehnen der Stücke seien durch x bzw. y gegeben. Leiten Sie eine Formel für die Länge der Kreissehne z in Abhängigkeit von x und y her.



Aufgabe 8.3 Polardarstellung

a) Schreiben Sie die folgenden komplexen Zahlen in Polardarstellung:

$$1+\mathrm{i}\sqrt{3}, \quad \frac{2-\mathrm{i}}{3-\mathrm{i}} - \frac{1+8\mathrm{i}}{5(1+3\mathrm{i})}.$$

b) Schreiben Sie $1+\mathrm{i}$ und $1-\mathrm{i}$ in Polardarstellung.
Zeigen Sie, dass $(1+\mathrm{i})^n + (1-\mathrm{i})^n \in \mathbb{R}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist.

c#) Es seien $z = |z|(\cos\phi + \mathrm{i}\sin\phi)$, $w = |w|(\cos\psi + \mathrm{i}\sin\psi)$, $w \neq 0$, zwei komplexe Zahlen. Zeigen Sie, dass $\dfrac{z}{w} = \dfrac{|z|}{|w|}\big(\cos(\phi-\psi) + \mathrm{i}\sin(\phi-\psi)\big)$.
Was bedeutet dies geometrisch für $z = 1$?

d) Schreiben Sie die Zahl $z = \frac{(-2+2\mathrm{i})^7}{(1+\mathrm{i}\sqrt{3})^5}$ in Polardarstellung.

Aufgabe 8.4 Bestimmen und skizzieren Sie die Menge $\left\{z \in \mathbb{C} : z^4 = \dfrac{\mathrm{i}}{-3+3\mathrm{i}}\right\}$.

Aufgabe# 8.5 Beweisen Sie das Additionstheorem für den Tangens unter Benutzung der Additionstheoreme für Sinus und Cosinus:

$$\tan(x+y) = \frac{\tan(x) + \tan(y)}{1 - \tan(x)\tan(y)}.$$

Aufgabe# 8.6 Lösen Sie Aufgabe 8.1c) mit Hilfe des Additionstheorems für den Tangens (siehe Aufgabe 8.5#) und ohne Verwendung von komplexen Zahlen.

Aufgabe# 8.7 Finden Sie $w, z \in \mathbb{C}$ mit

a) Produkt -1 und Summe 2.

b) Produkt 2 und Summe 2.

(*Hinweis:* Multiplizieren Sie $(x - w) \cdot (x - z)$ aus. Welche Koeffizienten und welche Nullstellen hat das Polynom?)

Aufgabe# 8.8 Beweisen Sie: hat die quadratische Gleichung $x^2 + px + q = 0$ mit $p, q \in \mathbb{C}$ reelle Lösungen, so ist $\mathrm{Im}(p) \cdot \mathrm{Im}(q) = 0$. Ist die Umkehrung auch wahr?

Aufgabe# 8.9 Finden Sie alle Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der Gleichung $z^3 = \sqrt{3} + \mathrm{i}$.

Aufgaben mit # werden **nicht** korrigiert und müssen **nicht** abgegeben werden.