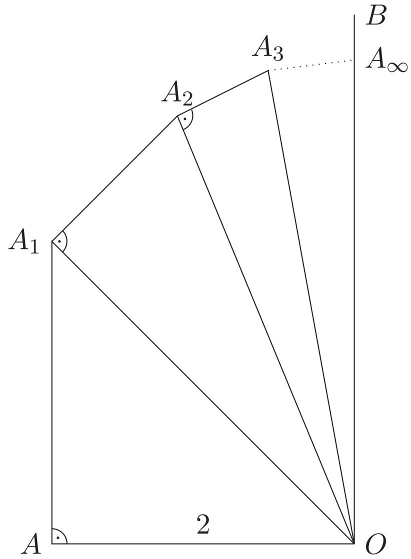
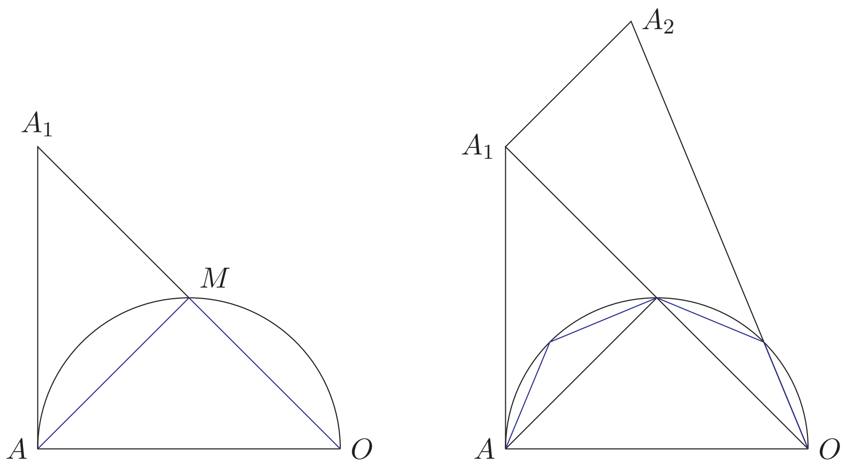
Dr. Anton Malevich

Aufgabe 10.1 Wir betrachten das “Restwinkelhalbierungsverfahren zur Ermittlung des Halbkreisumfangs”, oder, mit anderen Worten, einen Algorithmus zur Konstruktion einer Strecke der Länge π. Dies wird anhand folgender Skizze erläutert.



Dabei gilt: $|OA| = 2$, $\angle BOA = \angle OAA_1 = \angle OA_iA_{i+1} = \frac{\pi}{2}$ sowie $\angle AOA_1 = \frac{\pi}{4}$ und $\angle A_iOA_{i+1} = \frac{\pi}{2^{i+2}}$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie: $|OA_\infty| = \lim\limits_{i\to\infty} |OA_i| = \pi$, indem Sie wie folgt vorgehen.



a) Zeigen Sie zunächst, dass $|OA_1| = |OM| + |MA|$ gilt, d.h. $|OA_1|$ gleich dem Halbumfang des in den Einheitskreis eingeschriebenen Quadrates ist.

b) Zeigen Sie nun, dass $|OA_2|$ gleich dem Halbumfang des in den Einheitskreis eingeschriebenen regelmäßigen 8-Ecks ist.

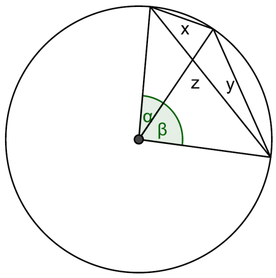
c) Zeigen Sie per Induktion, dass $|OA_i|$ gleich dem Halbumfang des in den Einheitskreis eingeschriebenen regelmäßigen 2^{i+1}-Ecks ist.

Aufgabe 10.2 a) Schreiben Sie $\sin(\varphi + \psi)$ mit Hilfe des Additionstheorems so, dass in dem Term nur noch $\sin(\varphi), \sin(\psi)$ vorkommen und $\cos(\varphi), \cos(\psi)$ nicht mehr vorkommen.

b) Leiten Sie mit Hilfe Ihres Ergebnisses aus (a) das Additionstheorem des arcsin her:

$$\arcsin(x) + \arcsin(y) = \arcsin\left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right).$$

c) Aus einem kreisrunden Kuchen mit Radius 1 werden zwei Stücke herausgeschnitten. Die Längen der Kreissehnen der Stücke seien durch x bzw. y gegeben. Leiten Sie eine Formel für die Länge der Kreissehne z her.



Aufgabe 10.3 Führen Sie das Archimedes-Verfahren zur Bestimmung des Kreisumfangs durch. Gehen Sie dabei von einem ein- und einem umbeschriebenen Sechseck aus und führen Sie zwei Verdopplungsschritte aus.

Aufgabe 10.4 Benutzen Sie in dieser Aufgabe den Wert $R = 6371\,\text{km}$ für den Erdradius.

a) Wir nehmen an, ein Seil würde um den Äquator gelegt, um $l_0 = 2\,\text{m}$ verlängert und dann im Kreis um die Erde gespannt. In welcher Höhe über dem Boden verliefe das Seil?

b) Wie verändert sich die Antwort aus a), wenn man das Seil um eine Kugel mit dem Radius 1 m legt und dann um 2 m verlängert?

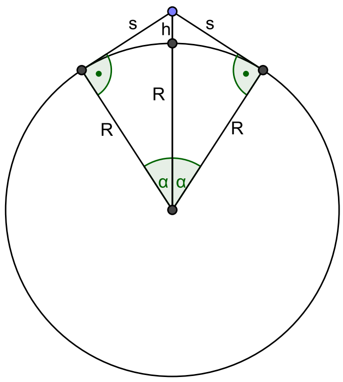
c) Das verlängerte Seil aus Aufgabe (a) wird um den Äquator gelegt und an einem Punkt straff gezogen. Wie groß in der maximale Abstand von der Erdoberfläche?

Tipp: Sie können dazu wie folgt vorgehen:

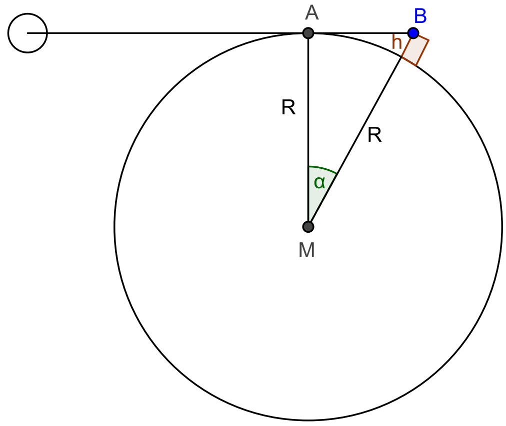
i) Berechnen Sie die Strecke s sowie die Länge des auf der Erde aufliegenden Seilen in Abhängigkeit von α. Wie lang muss das Seil bei gegebenem Winkel α sein?

ii) Verwenden Sie die Näherung für kleine Winkel $\tan(\alpha) \approx \alpha + \frac{\alpha^3}{3}$ um α aus l_0 zu bestimmen.

iii) Berechnen Sie nun h. Sie dürfen hierzu die Näherung $\cos(\alpha) \approx 1 - \frac{\alpha^2}{2}$ verwenden.



Aufgabe# 10.5 Anna sitzt am Strand und erwartet den Sonnenuntergang. Bastian steht am Fenster seines Hotelzimmers im fünften Stock genau 20 m über Anna. Dadurch kann er die Sonne etwas länger sehen. Er sieht den Sonnenuntergang 34,5 Sekunden später als Anna. Die beiden versuchen aus dieser Information den Erdradius zu bestimmen.



In der obigen Zeichnung ist A der Standort von Anna, wenn sie den Sonnenuntergang sieht, B derjenige von Bastian 34,5 Sekunden später. h bezeichne die Höhe seines Aussichtpunkts.

Wie groß ist α? Berechnen Sie daraus den Erdradius R und den Erdumfang.

Tipp: Verwenden Sie die Näherung $\cos(\alpha) \approx 1 - \frac{\alpha^2}{2}$ für kleine Winkel α.

Aufgabe# 10.6 Wir wollen die Fläche A_k der Figur

$$F_k = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq x^k\right\}, \text{ für} k \in K$$

ausrechnen. Dazu wählen wir eine Zahl q $(0 < q < 1)$ und zelegen das Intervall $[0, 1]$ durch Intervalle mit Endpunkten $1 > q > q^2 > q^3 > \dots$

a) Zeigen Sie, dass für A_k die folgende Einschließung gilt:

$$\frac{1-q}{1-q^{k+1}} \leq A_k \leq q^{-k}\frac{1-q}{1-q^{k+1}}.$$

b) Nun können wir A_k aus der oberen Ungleichung als Grenzwert als $q \to 1$ finden. Zeigen Sie, dass $A_k = \frac{1}{k+1}$ ist. (*Hinweis:* Benutzen Sie die Summenformel für die geometrische Reihe.)

Frohe Weihnachten
und einen guten Start ins Neue Jahr!

Aufgaben und Aufgabenteile mit # werden **nicht** korrigiert und müssen **nicht** abgegeben werden.