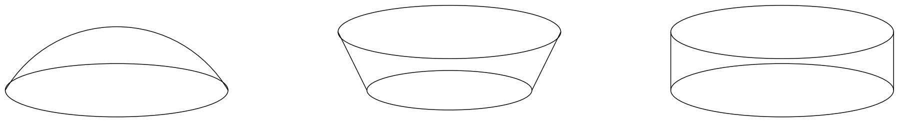
Aufgabe 11.1

a) Leiten Sie durch Vergleich mit einem geeigneten Kegelstumpf die Formel

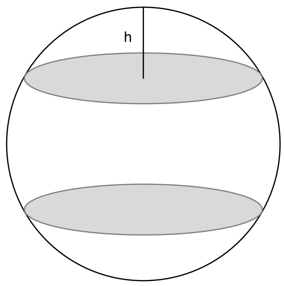
$$V = \pi\big(R - \tfrac{1}{3}h\big)h^2$$

für eine Kappe der Höhe h von einer Kugel mit Radius R her.



b) Der Stiel und die Kerne eines kugelförmigen Apfels mit Radius R werden mit einem Apfelstecher entfernt. Wie viel Volumen bleibt übrig, wenn der zylinderförmige Apfelstecher den Radius r hat?

c) Eine Kugel vom Radius 1 soll in drei Scheiben des gleichen Volumens geschnitten werden. Stellen sie eine kubische Gleichung für die Dicke h der äußeren Scheiben auf. Bestimmen Sie mit Hilfe eines Taschenrechners oder Computers näherungsweise die Lösungen dieser Gleichung. Welche ist hier relevant?



Aufgabe 11.2 In dieser Aufgabe ist $\ln(x) := \log_e(x)$.

a) Zeigen Sie: $\log_a(b) = \log_{a^n}(b^n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

b) Vereinfachen Sie soweit wie möglich:

i) $\frac{3^{(3^3)}}{(3^3)^3}$, ii) $\log_2(10)\log_{10}(2)$, iii) $\log_3\big(\frac{5}{4}\big)+\log_9\big(\frac{24}{5}\big)-\log_9\big(\frac{5}{6}\big)$, iv) $\dfrac{\ln(10^{\ln(e^2)})}{\ln(5)+\ln(2)}$.

c) Lösen Sie die folgenden Gleichungen:
(a) $4^x = 0,125$, (b) $3\ln(x) = \ln(56) - \ln(7)$,
(c) $\log_2(10x) = 1 + \log_2(5)$, (d) $\ln(x) = 2\ln(5) + 3\ln(2)$.

Aufgabe 11.3 Es bezeichne $\ln(x)$ die Fläche zwischen der Hyperbel $y = \frac{1}{x}$ und der x-Achse im Intervall $[1, x]$.

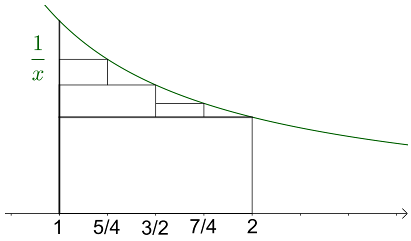
a) Nähern Sie $\ln(10)$ durch die Fläche von 3 gleich breiten Trapezen an.

b) Zeigen Sie, dass $\ln(10) \approx \frac{10}{3}\ln(2) - \frac{1}{125}$. (*Hinweis:* Schreiben Sie $\ln\big(\frac{2^{10}}{10^3}\big)$ auf zwei verschiedene Arten und benutzen Sie die Näherung $\ln(1+x) \approx x$ für kleine x.)

c) Setzen Sie in die Formel aus b) die Näherung $\ln(2) \approx \frac{7}{10}$ (erhält man ebenfalls mit drei Trapezen) ein.

d) Berechnen sie den Wert von $\ln(10)$ mit einem Taschenrechner. Welche der beiden Näherungen von $\ln(10)$ aus a) und aus c) ist besser?

Aufgabe 11.4 Betrachten Sie das folgende Bild.



a) Berechnen Sie den Flächeninhalt der 4 Rechtecke aus den Bild.

b) Wie könnte man das Verfahren fortsetzen um den Flächeninhalt der von dem Graphen der Funktion $y = \frac{1}{x}$ und der x-Achse zwischen 1 und 2 eingeschlossen wird, in (unendlich viele) Rechtecke aufzuteilen?

c) Stellen Sie eine Vermutung auf, was der Flächeninhalt der weiteren Rechtecke sein wird (ohne Beweis), und folgern Sie daraus die folgende Formel:

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}.$$

(*Hinweis:* $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}$.)

Aufgabe# 11.5

a) Zeigen Sie, dass die Flächen unter dem Graphen der Funktion $y = \frac{1}{x}$ von 1 bis a und von $\frac{1}{a}$ bis 1 übereinstimmen für alle $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$.

b) Wir wählen zwei Punkte $A = \left(a, \frac{1}{a}\right)$ und $B = \left(b, \frac{1}{b}\right)$, $a, b \in \mathbb{R}$ und $0 < a < b$ auf dem Graphen der Funktion $y = \frac{1}{x}$. Berechnen Sie den Inhalt der Fläche die von den Geraden von $C = (0, 0)$ nach A bzw. nach B und dem Graphen der Funktion eingeschlossen wird.