Elementarmathematik – WS 2016/2017 **Blatt 12**

DR. ANTON MALEVICH

Aufgabe 12.1 Wir definieren die Funktionen

$$\cosh x := \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \qquad \sinh x := \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \qquad \tanh x := \frac{\sinh x}{\cosh x}.$$

a) Beweisen Sie die folgenden Identitäten:
(i) $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ sowie $\tanh^2 x + \frac{1}{\cosh^2 x} = 1$,
(ii) $\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$.

b) Zeigen Sie, dass die Funktionen $\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ bzw. $\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ invers zur Funktionen $\sinh x$ bzw. $\tanh x$ sind.

Aufgabe 12.2 Berechnen Sie mit Hilfe der aus der Rechenregeln die Ableitungen der folgenden Funktionen. (Dabei können Sie die Ableitungen von $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$, $\ln x$, e^x und x^r, $r \in \mathbb{R}$, als bekannt annehmen.)

a) $f(x) = (4x^2 - x)(x^2 - 1)$, b) $f(x) = 7\sin(x) + \cos(x)$, c) $f(a) = \tan(a)$,
d) $g(x) = \ln(\cos(x))$, e) $h(\phi) = \sin(\phi)\cos(\phi)$, f) $x(t) = s\sqrt[4]{t}$,
g) $f(x) = x^{\cos(x)}$, h) $f(x) = e^{x^2}$, i) $f(t) = \frac{6t^4+2t^2-7t}{2t^3}$.

Aufgabe 12.3

a) Bestimmen Sie den Wert der folgenden Integrale:
(i) $\int\limits_{-1}^{1} (a^3 + \frac{1}{2}a^2 - xa + 2)da$, (ii) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)\cos(x)dx$, (iii) $\int\limits_{-1}^{1} \frac{\sin(x)^{37}\cos(x)^{42}}{x^6+17x^4-3x^2+3}dx$.

b) Bestimmen Sie Stammfunktionen der folgenden 3 Funktionen:
(i) $f(x) = \ln(x)$, (ii) $g(x) = x^2 e^x$, (iii) $h(x) = \frac{x^3}{x^4+1}$.

Aufgabe 12.4 Bestimmen Sie die folgenden Flächen durch integrieren:

a) Fläche zwischen dem Graphen von $y = e^x$, der y-Achse und der Geraden $y = e$.

b) Fläche zwischen den Graphen von $y = \sqrt{x}$ und $y = x^3$.

c) Fläche zwischen den Strecken AC, CB und der Hyperbel $y = \frac{1}{x}$, wobei $C = (0,0)$, $A = \left(a, \frac{1}{a}\right)$ und $B = \left(b, \frac{1}{b}\right)$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ und $0 < a < b$. (*Hinweis:* Schreiben Sie zuerst die Gleichungen der Geraden durch A und C bzw. durch B und C.)