Aufgabe 13.1 (*16 Punkte*)

a) Für beliebiges $a > 0$ sei die parametrisierte Funktion f_a gegeben durch $f_a(x) = \frac{x}{a} + \frac{a}{x}$. Für welchen Wert von a wird der Flächeninhalt zwischen dem Graphen von f_a und der x-Achse über dem Intervall $[1, e]$ minimal?

b) Gegeben seien zwei Funktionen $f(x) = a^x$ und $g(x) = a^{-x}$. Wie muss a gewählt werden, damit sich die Graphen von f und g orthogonal schneiden, d.h., die Tangenten an beiden Graphen im Schnittpunkt orthogonal sind?

Aufgabe 13.2 (*16 Punkte*) Berechnen Sie die folgenden Integrale:

a) $\displaystyle\int_1^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$, b) $\displaystyle\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2}$, c) $\displaystyle\int_1^e \frac{\cos(\ln x)}{x} dx$, d) $\displaystyle\int_e^{e^2} \frac{dx}{x \ln x}$,

e) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 x dx$, f) $\displaystyle\int_1^2 \frac{e^{\frac{1}{x^2}}}{x^3} dx$, g) $\displaystyle\int_1^e \frac{dx}{x(1+\ln^2 x)}$, h) $\displaystyle\int_0^{\pi} x^3 \sin x dx$.

Aufgabe 13.3 (*16 Punkte*)

a) Es seien $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ und $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$. Bestimmen Sie die Taylorreihen von $\cosh x$ und $\sinh x$ im Punkt 0

(i) nach Definition, d.h. durch berechnen der Ableitungen;

(ii) unter Benutzung der Taylorreihe von e^x und Rechenregeln.

b) Für die Funktion $f(x) = \dfrac{1}{1+x+x^2}$ sei

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \dots,$$

die Taylorreihe von f, wobei $a_i \in \mathbb{R}$ für $i \in \mathbb{N}_0$.
Bestimmen Sie die Koeffizienten a_0, a_1, a_2, a_3, a_4.

c#) Zeigen Sie, dass die Taylorreihe von $\sin(2x + \frac{\pi}{4})$ durch die folgende Formel gegeben ist:

$$\sin\bigl(2x + \frac{\pi}{4}\bigr) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k!} \sin\Bigl[(2k+1)\frac{\pi}{4}\Bigr] x^k.$$

Aufgaben und Aufgabenteile mit # werden **nicht** korrigiert und müssen **nicht** abgegeben werden.