

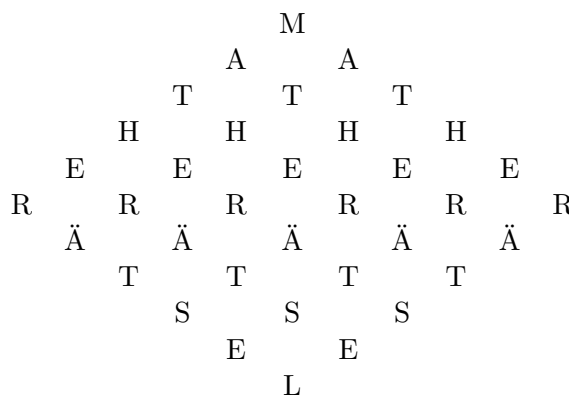
Aufgabe 3.1

a) Zeichnen und berechnen Sie die ersten 11 Zeilen des Pascalschen Dreiecks. Färben Sie in einer Zeichnung alle durch 3 teilbaren Einträge ein und in einer anderen alle durch 5 teilbaren. Sehen Sie ein Muster?

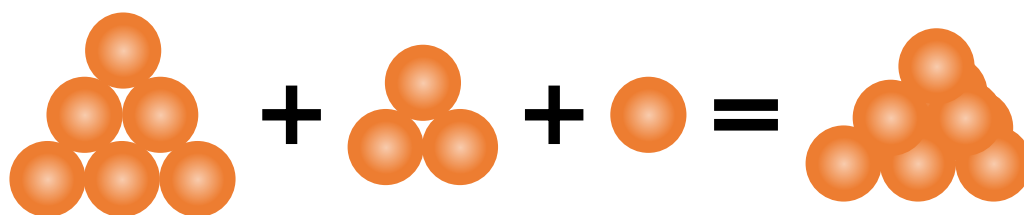
b) Berechnen Sie die folgenden Summen:

i) $\sum_{k=0}^{11} \binom{11}{k}$, ii) $\sum_{k=0}^{10} \binom{10}{k} (-1)^k$, iii) $\sum_{k=0}^9 \binom{9}{k} 2^k$.

c) Auf wie vielen Wegen lässt sich das Wort MATHERÄTSEL in der Abbildung lesen? Beginnen Sie beim Ablesen mit dem oberen Buchstaben M und gehen Sie dann immer schräg nach unten links oder unten rechts, bis Sie zu dem ganz unten stehenden Buchstaben L gelangen.



Aufgabe 3.2 Ein Obsthändler stapelt seine Orangen nach folgendem Mustern zu Tetraedern:



Die Anzahl Orangen, die er für einen Tetraeder mit Kantenlänge n benötigt, bezeichnen wir als n -te Tetraederzahl T_n .

- a) Berechnen Sie die ersten fünf Tetraederzahlen.
- b) Wo finden Sie diese Zahlen im Pascalschen Dreieck?
- c) Stellen Sie eine Formel für die n -te Tetraederzahl auf und beweisen Sie diese.

Aufgabe 3.3

- a) Wenn zur Zeit 13:37 Uhr ist, wie viel Uhr ist es in 100000 Minuten?
- b) Berechnen Sie die folgenden Werte:
 - i) $11^{100} \bmod 5$,
 - ii) $5^{100} \bmod 3$,
 - iii) $3^{102} \bmod 5$.

Aufgabe 3.4 Sei $n \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen mit Induktion:

a) Die natürliche Zahl $4^n + 15n - 1$ ist durch 9 teilbar.

b)
$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n.$$

Aufgabe# 3.5 Sei $n \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen mit Induktion:

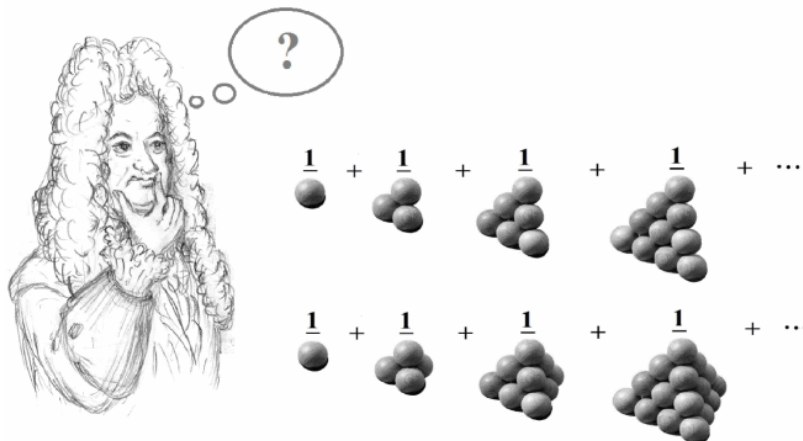
a) Die natürliche Zahl $7^{2n} - 2^n$ ist durch 47 teilbar.

b) Die natürliche Zahl $5^n + 7$ ist durch 4 teilbar.

c)
$$\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} = n \cdot 2^{n-1}.$$

Aufgabe# 3.6 Zeigen Sie: Teilt man eine Quadratzahl durch 7, so bleibt niemals der Rest 3, 5 oder 6.

Aufgabe# 3.7 Helfen Sie Leibniz die Summe der reziproken Dreieckszahlen sowie die Summe der reziproken Tetraederzahlen zu bestimmen.



Aufgaben und Aufgabenteile mit # werden **nicht** korrigiert und müssen **nicht** abgegeben werden.