Aufgabe 4.1

a) Beweisen Sie die folgenden Eigeschaften der Binomialkoeffizienten:

i) Für $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq k \leq n$ gilt

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}.$$

ii) Für $n, m \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$\sum_{k=0}^{m} \binom{n+k}{n} = \binom{n+m+1}{n+1}.$$

b) Beweisen Sie die folgende Verallgemeinerung der aus der Schule bekannten dritten binomischen Formel: Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ und alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$(x-y)(x^n + x^{n-1}y + x^{n-2}y^2 + \ldots + xy^{n-1} + y^n) = x^{n+1} - y^{n+1}.$$

Aufgabe 4.2 Teilbarkeit.

a) Wir suchen eine Regel für die Teilbarkeit durch 11.

i) Berechnen Sie $10^k \bmod 11$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

ii) Zeigen Sie: Die Zahl $(z_n \ldots z_1 z_0)_{10}$ ist genau dann durch 11 teilbar, wenn ihre Wechselsumme $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k z_k$ durch 11 teilbar ist.

b) Finden Sie die Regeln für die Teilbarkeit durch 8 und 9.

c) Finden Sie eine Regel für die Teilbarkeit durch 27.

Aufgabe 4.3 Es Sei $\frac{a}{b}$ ein gekürzter Bruch. Der Ford-Kreis über $\frac{a}{b}$ ist der Kreis mit Mittelpunkt $M = \left(\frac{a}{b}, \frac{1}{2b^2}\right)$ und Radius $\frac{1}{2b^2}$.

a) Zeichnen Sie die Ford-Kreise zu den folgenden Brüchen (alle auf einer Zeichnung):

$$\frac{0}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{1}.$$

b) Zeigen Sie: Sind $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ zwei verschiedene Brüche mit $|bc - ad| = 1$, dann berühren sich die zugehörigen Ford-Kreise (von außen).

Aufgabe 4.4 Gegeben sei die Folge

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{0}+\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}.$$

Berechnen Sie a_1, a_2, a_3, a_4 sowie deren Quadrate. Was fällt Ihnen auf? Beweisen Sie Ihre Aussage. Wie muss man n wählen damit $a_n = 1000$ gilt?

Aufgabe# 4.5 Schreiben Sie folgende rationalen Zahlen als reduzierte (gekürzte) Brüche:

a) $\frac{5}{6} + \frac{4}{15}$, b) $\frac{21}{20} + \frac{12}{14}$, c) $0,\overline{142857}$, d) $0,\overline{27}$, e) $0,27\overline{45}$, f) $0,123\overline{456}$.

Aufgabe# 4.6 Auf wie viele Nullen endet $(1000!)$? Auf wie viele Nullen endet $\binom{1000}{500}$?

Aufgabe# 4.7 Was ist $10^{42} \bmod 61$?

Aufgabe# 4.8 Berechnen Sie die ungefähren Wahrscheinlichkeiten (in Prozent), dass beim Lotto *6 aus 49* mit einem Tipp genau r Richtige erzielt werden ($0 \leq r \leq 6$).

Aufgaben und Aufgabenteile mit # werden **nicht** korrigiert und müssen **nicht** abgegeben werden.