**Aufgabe 6.1** In dieser Aufgabe wollen wir eine Näherung für $\sqrt{1+x}$ für $|x|$ klein finden.

a) Zuerst wollen wir eine Näherung der Form $\sqrt{1+x} \approx 1 + a \cdot x$ mit $a \in \mathbb{Q}$ finden. Wie muss $a$ gewählt werden, sodass

$$1 + x = (1 + a \cdot x)^2$$

gilt, wobei der Term mit $x^2$ ignoriert wird. (Ist $|x| < 1$ sehr klein, so ist $x^2$ viel kleiner!)

b) Nun wollen wir eine Näherung $\sqrt{1+x} \approx 1 + a \cdot x + b \cdot x^2$ mit $a, b \in \mathbb{Q}$ finden. Wie muss man $a, b$ wählen, wenn man will, dass die Gleichung

$$1 + x = (1 + a \cdot x + b \cdot x^2)^2$$

auch für den Term mit $x^2$ stimmt? (Dabei werden also die Terme mit $x^3$ und $x^4$ ignoriert: Es gilt für $|x| < 1$ stets $x^4 < |x|^3 < x^2 < 1$.)

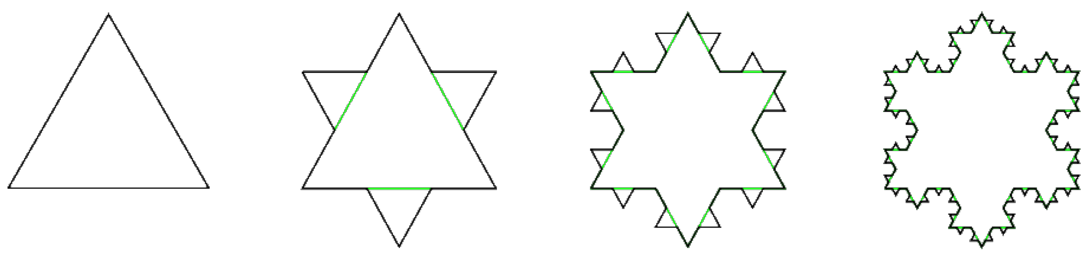
Theoretisch könnte man auf diese Weise immer bessere Näherungen an $\sqrt{1+x}$ finden.

**Aufgabe 6.2** Betrachten Sie die folgenden Folgen. Zeigen Sie, dass beide monoton steigend sind. Bestimmen Sie, ob die Folgen beschränkt sind (mit Begründung!).
Welche dieser Folgen sind also konvergent?

a) $a_1 = \sqrt{2},\ a_{n+1} = (\sqrt{2})^{a_n}$.

b) $b_1 = \sqrt{2},\ b_{n+1} = (b_n)^{\sqrt{2}}$.

**Aufgabe 6.3** In einem gleichseitigen Dreieck mit der Seitenlänge 1 cm wird in einem ersten Schritt jede Seite in drei gleich lange Teilstrecken zerlegt und über der mittleren Teilstrecke jeweils ein gleichseitiges Dreieck außen angehängt. Dieses Verfahren wird mehrmals wiederholt. Auf diese Weise entsteht eine Schneeflocke. Dabei wird in jedem Schritt an jeder Teilstrecke der Schneeflocke ein gleichseitiges Dreieck über dem mittleren Drittel dieser Teilstrecke angehängt.



a) Leiten Sie eine Formel für den Umfang der Schneeflocke nach $n$ Schritten her. Konvergiert die Folge der Umfänge? Ab welchem $n$ ist der Umfang der Schneeflocke größer als der Erdumfang?

b) Leiten Sie eine Formel für den Flächeninhalt der Schneeflocke nach $n$ Schritten her. Konvergiert die Folge der Flächeninhalte? Wenn ja, berechnen Sie den Grenzwert dieser Folge.

**Aufgabe 6.4** Approximation von $\sqrt{2}$.

a) Berechnen Sie Näherungswerte für $\sqrt{2}$, indem Sie

i) drei Schritte des Theon-Verfahrens mit Startwert $\frac{1}{1}$ durchführen (Aufgabe 5.4).

ii) drei Schritte des Heron-Verfahrens mit Startwert 1 durchführen (Vorlesung).

iii) Ihre Näherung $\sqrt{1+x} = 1 + a \cdot x + b \cdot x^2$ aus Aufgabe 6.1b verwenden.

Welche Näherung ist am besten, welche am schlechtesten?

b) Zeigen Sie: $\sqrt{2} = \frac{7}{5}\sqrt{1+\frac{1}{49}}$. Berechnen Sie nun $\sqrt{2}$ erneut indem Sie Ihre Näherung aus Aufgabe 6.1b für $\sqrt{1+\frac{1}{49}}$ verwenden. Erhalten Sie eine bessere Näherung?

c) Allgemeiner gilt: $\sqrt{2} = \frac{1}{1}\sqrt{1+\frac{1}{1}} = \frac{3}{2}\sqrt{1-\frac{1}{9}} = \frac{7}{5}\sqrt{1+\frac{1}{49}}$. Finden Sie die nächsten kleinsten Zahlen $c, d \in \mathbb{N}$ mit $\sqrt{2} = \frac{d}{c}\sqrt{1-\frac{1}{d^2}}$ bzw. $\sqrt{2} = \frac{d}{c}\sqrt{1+\frac{1}{d^2}}$.

**Aufgabe$^{\#}$ 6.5** Berechnen Sie die Grenzwerte der konvergenten Folgen aus Aufgabe 6.3.

**Aufgabe$^{\#}$ 6.6** Sei $n \in \mathbb{N}$.

a) Bestimmen Sie eine explizite Formel für $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$.

b) Bestimmen Sie auf ähnliche Weise wie in a) eine explizite Formel für $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+2)}$. Was ist also der Wert der Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+2)}$?

c) Bestimmen Sie den Wert der Reihe

$$\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{1}{4 \cdot 5 \cdot 6} + \cdots$$

**Aufgabe$^{\#}$ 6.7** Können Sie ähnlich zu Aufgabe 6.6 der Wert der Reihe $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+\ell)}$ für beliebiges $\ell \in \mathbb{N}$ bestimmen?

**Aufgabe$^{\#}$ 6.8** Untersuchen Sie die folgende Folge, in Abhängigkeit des Startwertes, auf Konvergenz. Bestimmen Sie den Grenzwert, falls die Folge konvergent ist.

$$a_1 \in \mathbb{Q},\ a_{n+1} = \frac{a_n^2}{2}.$$

**Aufgabe$^{\#}$ 6.9** Zeigen Sie: $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^k} = 2$, und folgern Sie daraus: $\sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{4} \cdot \sqrt[8]{8} \cdots = 4$.

Aufgaben und Aufgabenteile mit $^{\#}$ werden **nicht** korrigiert und müssen **nicht** abgegeben werden.