Dr. Anton Malevich

Aufgabe 7.1 Für $s \in \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{N}_0$ ist der (verallgemeinerte) Binomialkoeffizient wie folgt definiert:

$$\binom{s}{k} = \frac{s(s-1)\cdots\big(s-(k-1)\big)}{k!}.$$

Zeigen Sie:

$$\binom{1/2}{n} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1}(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{n}\cdot\binom{2n-2}{n-1} \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Aufgabe 7.2 Es seien $z_1 = -\frac{1-\mathrm{i}}{2+\mathrm{i}} - \frac{3+\mathrm{i}}{4}$, $z_2 = \frac{(1+\mathrm{i})^2}{2} - \frac{6+5\mathrm{i}}{\mathrm{i}^3}$.

Stellen Sie die Zahlen z_1, z_2, z_1+z_2, $\overline{z_1+z_2}$, $z_1 \cdot z_2$, $\overline{z_1 \cdot z_2}$ und $\frac{z_1}{z_2}$ in der Form $a+\mathrm{i}b$, mit $a, b \in \mathbb{R}$, dar. Berechnen Sie zudem $|z_1|$, $|z_2|$, $|z_1+z_2|$, $|z_1 \cdot z_2|$ und $\left|\frac{z_1}{z_2}\right|$.

Aufgabe 7.3 Geometrie der komplexen Zahlenebene

a) Skizzieren Sie die Mengen $A \cap B$ und $A \cup B$, wobei $A = \{z \in \mathbb{C} : |z+\mathrm{i}| \le 2\}$ und $B = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) + |\mathrm{Im}(z)| \le 1\}$. (Für eine komplexe Zahl $z = a+b\mathrm{i}$ ist $\mathrm{Re}(z) = a$ der Realteil und $\mathrm{Im}(z) = b$ der Imaginärteil von z.)

b) Es gibt genau zwei Zahlen $z \in \mathbb{C}$ mit der Eigenschaft $z^2 = \mathrm{i}$. Zeichnen Sie die beiden in der komplexen Zahlenebene und berechnen Sie diese.

c) Bestimmen und skizzieren Sie die Menge $\left\{z \in \mathbb{C} : z^4 = \frac{\mathrm{i}}{-3+3\mathrm{i}}\right\}$.

(*Hinweis:* Finden Sie zuerst die Polardarstellung von $\frac{\mathrm{i}}{-3+3\mathrm{i}}$.)

Aufgabe 7.4 Zeigen Sie, dass alle komplexe Zahlen vom Betrag 1 und ungleich -1 als

$$\frac{1+\mathrm{i}x}{1-\mathrm{i}x}, \quad x \in \mathbb{R},$$

geschrieben werden können.

Stellen Sie konkret die Zahlen 1, i und $-\mathrm{i}$ in dieser form dar!

Aufgabe# 7.5 Betrachten Sie die Folge $b_n = 0{,}99^n \cdot n^{20}$.

a) Berechnen Sie b_n für $n = 1, 10, 100, 1000, 10000$. Sie dürfen hierzu einen Taschenrechner oder ein Computerprogramm verwenden.

b) Zeigen Sie, dass $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$. Dazu können Sie wie folgt vorgehen:

i) Zeigen sie zunächst: Es gibt ein $N \in \mathbb{N}$, sodass für alle $n \geq N$ gilt $\frac{b_{n+1}}{b_n} < 1$.

ii) Sei $q = \frac{b_{N+1}}{b_N}$. Zeigen Sie: $b_n \leq b_N \cdot q^{n-N}$ für alle $n \geq N$.

iii) Folgern Sie daraus: $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$.

Aufgabe# 7.6 Dominosteine werden in Form einer Treppe so weit wie möglich über eine Tischkante hinaus gestapelt, ohne dass sie herunterfallen. Jeder Stein wird mit der Breitseite nach unten und der Längsseite rechtwinklig zur Tischkante hingelegt. Um einen maximalen Überhang zu erreichen, ohne dass der Stapel umkippt, wird ein erster Dominostein der Länge ℓ so hingelegt, dass sein Schwerpunkt genau über der Tischkante liegt. Damit hat er einen maximalen Überhang. Ein zweiter Stein wird so UNTER den ersten geschoben, dass der gemeinsame Schwerpunkt beider Steine über der Tischkante liegt und der Schwerpunkt des oberen Steines auf der Kante des unteren Steines liegt. Nun wird ein dritter Stein UNTER die beiden Steine geschoben. Dabei soll ebenfalls der gemeinsame Schwerpunkt der ersten zwei Steine über der Kante des unteren Steines liegen und der gemeinsame Schwerpunkt aller drei Steine über der Tischkante liegen, damit der Stapel nicht umfällt.
Fertigen Sie Skizzen des Stapels mit $1, 2$ und 3 Dominosteinen an. Wie groß ist jeweils der Überhang? Wie groß wird der Überhang, wenn man n Dominosteine der Länge l zur Verfügung hat? Wie weit kann der Überhang gebaut werden? (*Hinweis:* Liegt der Schwerpunkt von n Steinen bei S_1 und der Schwerpunkt von einem bei S_2, dann liegt der gemeinsame Schwerpunkt von den $n+1$ Steinen bei $\frac{n \cdot S_1 + S_2}{n+1}$.)

Aufgabe# 7.7 Es seien $z_1 = -\dfrac{8}{1+\mathrm{i}} - \dfrac{6-2\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$, $z_2 = \dfrac{4\mathrm{i}+2}{3\mathrm{i}} - \dfrac{1}{\mathrm{i}}$.
Berechnen Sie $\mathrm{Re}(z_1)$, $\mathrm{Im}(z_1)$, $|z_1|$, $\mathrm{Re}(z_2)$, $\mathrm{Im}(z_2)$, $|z_2|$, $\mathrm{Re}(z_1+z_2)$, $\mathrm{Im}(z_1+z_2)$, $|z_1+z_2|$, $\mathrm{Re}(z_1 \cdot z_2)$, $\mathrm{Im}(z_1 \cdot z_2)$, $|z_1 \cdot z_2|$ $\mathrm{Re}(\frac{z_1}{z_2})$, $\mathrm{Im}(\frac{z_1}{z_2})$, $\left|\frac{z_1}{z_2}\right|$.

Aufgabe# 7.8 Skizzieren Sie die Mengen $A \cap B$ und $A \cup B$, wobei

a) $A = \{z \in \mathbb{C} : |z-1| \leq 1\}$ und $B = \{z \in \mathbb{C} : |\mathrm{Re}(z)| + |\mathrm{Im}(z)| \leq 1\}$,

b) $A = \{z \in \mathbb{C} : |z-\mathrm{i}| \leq 1\}$ und $B = \left\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) + |\mathrm{Im}(z)|^2 \leq 1\right\}$,

c) $A = \{z \in \mathbb{C} : 2 \leq |z-1| \leq 4\}$ und $B = \left\{z \in \mathbb{C} : \left|\frac{3-4\mathrm{i}}{z-1+2\mathrm{i}}\right| < 5\right\}$.

Aufgabe# 7.9 Finden Sie alle Lösungen der Gleichung

$$z^3 = \sqrt{3} + \mathrm{i}.$$

Aufgabe# 7.10 Es seien $w_1 = \dfrac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$, $w_2 = \dfrac{1}{1-\mathrm{i}}$

a) Bestimmen Sie die Polardarstellung von w_1 bzw. w_2.

b) Lösen Sie die beiden Gleichungen $z^5 = w_1$ bzw. $z^5 = w_2$ nach z.

Aufgaben und Aufgabenteile mit # werden **nicht** korrigiert und müssen **nicht** abgegeben werden.