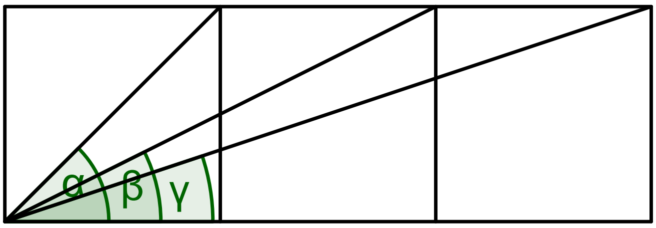
Aufgabe 8.1 Trigonometrie

a) Berechnen Sie $\sin(\alpha)$ und $\cos(\alpha)$ für $\alpha = \pi, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6}$. Verwenden Sie dafür nur die Definition von Cosinus und Sinus mittels des Einheitskreises, sowie elementare Eigenschaften von Dreiecken.

b) Verwenden Sie die Verdopplungsformel für den Cosinus um $\cos(\frac{\pi}{12}) = \frac{1}{2}\sqrt{\sqrt{3}+2}$ zu zeigen.

c) Bestimmen Sie nun $a, b \in \mathbb{Q}$, sodass gilt: $\cos(\frac{\pi}{12}) = \frac{1}{2}\left(a\sqrt{6} + b\sqrt{2}\right)$.
(*Hinweis:* Finden Sie zuerst $a, b \in \mathbb{Q}$ mit $\sqrt{3} + 2 = \left(a\sqrt{6} + b\sqrt{2}\right)^2$.)

Aufgabe 8.2 In der folgenden Zeichnung sind die drei Quadrate gleich groß:



Zeigen Sie $\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{2}$ einmal mit und einmal ohne Verwendung komplexer Zahlen.

Aufgabe 8.3 Polardarstellung

a) Schreiben Sie die folgende komplexe Zahlen in Polardarstellung:

$$1 + \mathrm{i}\sqrt{3}, \quad \frac{2-\mathrm{i}}{3-\mathrm{i}} - \frac{1+8\mathrm{i}}{5(1+3\mathrm{i})}.$$

b) Schreiben Sie $1 + \mathrm{i}$ und $1 - \mathrm{i}$ in Polardarstellung.
Zeigen Sie, dass $(1+\mathrm{i})^n + (1-\mathrm{i})^n \in \mathbb{R}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist.

c) Es seien $z = |z|(\cos\phi + \mathrm{i}\sin\phi)$, $w = |w|(\cos\psi + \mathrm{i}\sin\psi)$, $w \neq 0$, zwei komplexe Zahlen. Zeigen Sie, dass

$$\frac{z}{w} = \frac{|z|}{|w|}\big(\cos(\phi-\psi) + \mathrm{i}\sin(\phi-\psi)\big).$$

Was bedeutet dies geometrisch für $z = 1$?

d) Schreiben Sie die Zahl $z = \frac{(-2+2\mathrm{i})^7}{(1+\mathrm{i}\sqrt{3})^5}$ in Polardarstellung.

Aufgabe 8.4 Finden Sie $w, z \in \mathbb{C}$ mit

a) Produkt -1 und Summe 2.

b) Produkt 2 und Summe 2.

(*Hinweis:* Multiplizieren Sie $(x - w) \cdot (x - z)$ aus. Welche Koeffizienten und welche Nullstellen hat das Polynom?)

Aufgabe# 8.5 Skizzieren Sie die folgenden Teilmengen der komplexen Zahlenebene:

$$\begin{aligned}
A &= \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) \leq 0, \mathrm{Im}(z) \leq 0\}, \\
B &= \left\{z^2 : z \in A\right\}, \\
C &= \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 2\}, \\
D &= \left\{\frac{6+8i}{5} \cdot z : z \in C\right\}, \\
E &= \{z \in \mathbb{C} : |z - (2+2i)| = |z - (-2-2i)|\}.
\end{aligned}$$

Aufgabe# 8.6 Beweisen Sie das Additionstheorem für den Tangens unter Benutzung der Additionstheoreme für Sinus und Cosinus:

$$\tan(x+y) = \frac{\tan(x) + \tan(y)}{1 - \tan(x)\tan(y)}.$$

Aufgabe# 8.7 Beweisen Sie: hat die quadratische Gleichung $x^2 + px + q = 0$ mit $p, q \in \mathbb{C}$ reelle Lösungen, so ist $\mathrm{Im}(p) \cdot \mathrm{Im}(q) = 0$. Ist die Umkehrung auch wahr?

Aufgaben und Aufgabenteile mit # werden **nicht** korrigiert und müssen **nicht** abgegeben werden.